

Der Massenbedarf des Verfahrens ist

$$G(\tau_0) = k(\tau_1 + \tau_3), \quad (4.8)$$

er wird mit wachsender Dauer τ_0 grundsätzlich kleiner und nähert sich mit $\tau_0 \rightarrow \infty$ dem Wert (3.7) [4].

Für $\tau_2 = 0$ erhalten wir die sogenannte schnelligkeitsoptimale Steuerung, bei der zwei Intervalle mit maximalen Momenten k verschiedenen Vorzeichens unmittelbar aufeinander folgen. Die zuständigen Formeln ergeben sich aus (4.4) mit $\tau_0 = \tau_1 + \tau_3$, also $\tau_3 = \tau_0 - \tau_1$. Hier ist τ_0 nicht mehr frei wählbar, sondern ergibt sich wie τ_1 als Lösung der Gl. (4.4).

Mit der Bezeichnung

$$\varrho = \frac{1}{2k} \left(\vartheta_0 + \frac{\vartheta_0'^2 - \vartheta_0^2}{2k} \right)$$

erhält man τ_1 über eine quadratische Gleichung für e^{τ_1} aus der Formel

$$\tau_1 = \ln \frac{1 - \varrho + \sqrt{\varrho(2 + \varrho)}}{1 - \frac{\vartheta_0 + \vartheta_0'}{k}}. \quad (4.9)$$

Weiter findet man die Dauer $\tau_0 = \tau_1 + \tau_3$ aus

$$\sin \tau_0 = 2 \sin \tau_1 - \frac{\vartheta_0'}{k}, \quad \tau_0 \geq \tau_1. \quad (4.10)$$

Dieses Verfahren erfordert den größten Massenbedarf. Es ist offenbar nur möglich bei

$$|k| > |\vartheta_0 + \vartheta_0'|.$$

5. Schlußbemerkung

Für die Stabilisierung der Lage eines Raumflugkörpers ohne natürliche Stabilität wurden einfache optimale Verfahren vorgeschlagen und die Bedingungen ihrer Durchführbarkeit definiert. Die bei solchen Bestrebungen sonst vielfach ins Auge gefaßten periodischen Vorgänge und die Bedingung zu ihrer Aufrechterhaltung blieben außer Betracht, da hierbei ein erheblich größerer Massenbedarf zu erwarten ist als bei den oben vorgeschlagenen Verfahren.

Der Verfasser dankt Herrn Dr. P. Hempel, München, für wertvolle Bemerkungen.

Literatur:

- [1] Magnus, K.: Der Stabsatellit in einem radial symmetrischen Schwerfeld. Z. f. Flugwissenschaften 11 (1963), S. 233.
- [2] Kalman, R. E., Ho, Y. C., und Narendra, K. S.: Controllability of Linear Dynamical Systems. Contr. to Diff. Equations. Vol. I. S. 189.
- [3] Pontrjagin, L. S., Boltjanskij, V. G., Gamkrelidze, R. V., und Miscenko, E. F.: Mathematische Theorie optimaler Prozesse. R. Oldenbourg, München und Wien 1964 (Moskau 1960).
- [4] Hempel, P.: Steuerungen minimalen Geschwindigkeitsbedarfs. Erscheint in Regelungstechnik 13 (1965).

Die Umformung von gewöhnlichen Differentialgleichungen in Blockschaltbilder

Von H. TRAUBOTH, München

Die Umformung von linearen und nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen sowie von elektrischen Netzwerken in Blockschaltbilder, die für eine automatische numerische Berechnung durch einen elektronischen Digitalrechner besonders geeignet sind, wird an Hand einiger typischer Beispiele gezeigt.

The author explains, with the help of a number of typical examples, how linear and non-linear differential equations and electrical networks can be converted into block diagrams, which are particularly suitable for calculation by means of an electronic digital computer.

1. Einleitung

In der Regelungstechnik ist die Darstellung von automatischen Regelsystemen in Form von Blockschaltbildern oder Signalflußdiagrammen üblich. Das Blockschaltbild wurde ursprünglich aus dem Gerätebild eines Regelkreises entwickelt und gibt die dynamischen Eigenschaften der einzelnen Regelkreisglieder durch Übergangs- oder Übertragungsfunktionen an [1]. Die Dynamik von umfangreichen physikalischen Systemen wird dagegen im allgemeinen durch Differentialgleichungen beschrieben. So vermittelt z. B. ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen das dynamische Verhalten eines Kernreaktors. Für den Ingenieur ist aber der Umgang mit Blockschaltbildern angenehmer, da er Änderungen am System wegen der besseren Übersichtlichkeit leichter verfolgen kann.

Es wurde bisher wenig beachtet, daß man sowohl lineare als auch nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen und damit auch elektrische Netzwerke leicht als Blockschaltbilder darstellen kann.

Es lassen sich für ein Differentialgleichungssystem mehrere gleichwertige Blockschaltbilder finden. Hier sollen nur solche Blockschaltbilder aufgestellt werden, die eine relativ leichte Berechnung auch von nichtlinearen Systemen erlauben. Außerdem sollen die Blockschaltbilder so aufgebaut sein, daß sie bei beliebiger Struktur für eine möglichst einfache automatische Berechnung durch einen elektronischen Digitalrechner geeignet sind [2]. Zu diesem Zweck sollen die Glieder, aus denen ein Blockschaltbild zusammengesetzt sein kann, Funktionen der Zeit t (und nicht der komplexen Frequenz s) kennzeichnen.

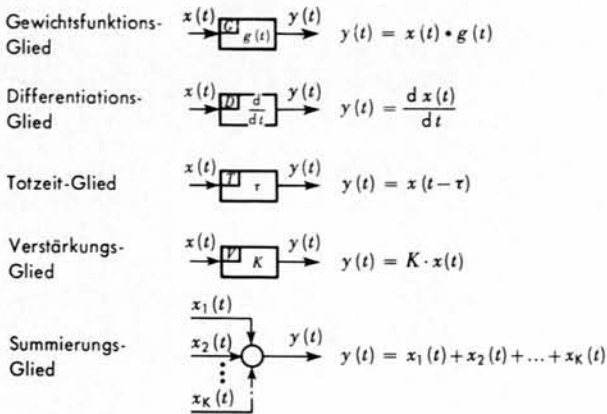
2. Aufbau des Blockschaltbildes

Ein Blockschaltbild soll aus mehreren rückwirkungsfreien Gliedern bestehen können, die verschiedene Funktionen kennzeichnen (Bild 1), bei linearen Systemen:

1. eine Gewichtsfunktion $g(t)$;
2. einen Integrator als Sonderfall der Gewichtsfunktion ($g(t) = 1$);
3. einen Differentiator 1. Ordnung;
4. eine Totzeit bekannter Länge;

- 5. einen Verstärker bekannter positiver oder negativer Verstärkung;
 - 6. einen Summierer mit praktisch beliebig vielen Eingängen.
- Bei *nichtlinearen* Systemen kommen noch zwei Arten von Gliedern hinzu:
- 7. das nichtlineare Übertragungsglied;
 - 8. der Multiplikator mit praktisch beliebig vielen Eingängen.
- Diese Glieder lassen ein Signal nur in der Pfeilrichtung durchlaufen. Durch beliebiges Verbinden der Glieder kann man ein beliebig stark vermaschtes Blockschaltbild erhalten.

Lineare Glieder



Nichtlineare Glieder

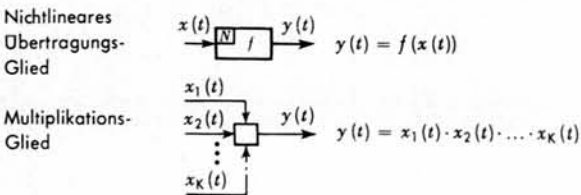


Bild 1. Die verschiedenartigen Glieder, aus denen ein Blockschaltbild zusammengesetzt sein kann, und die Beziehungen zwischen Eingangs- und Ausgangssignal als Funktionen der Zeit *t*.

Die Differentialgleichungen werden nach einer formellen Laplace-Transformation so umgeformt, daß sich Übertragungsfunktionen ergeben, deren inverse Laplace-Transformation in ihre Gewichtsfunktionen durch bloßes Ablesen von Transformationstabellen [3], [4] leicht bewerkstelligt werden kann. Dies läßt sich ohne Schwierigkeit erreichen, wenn man davon ausgeht, daß zum Erlangen dieser einfachen Übertragungsfunktionen das System aus beliebig miteinander verbundenen Gliedern bestehen darf. Führt die Umformung auf Übertragungsfunktionen, deren Pole nicht sofort ersichtlich sind, so ist dies ein Zeichen dafür, daß das Blockschaltbild bereits beim Umformen zu stark reduziert wurde. Durch Erweitern der Blockschaltung lassen sich dann einfachere Übertragungsfunktionen finden.

Es soll hier nicht versucht werden, eine allgemein gültige Theorie aufzustellen, die beweist, daß jede gewöhnliche Differentialgleichung in ein Blockschaltbild mit den oben angegebenen Gliedern umgewandelt werden kann. Vielmehr sollen einige typische Beispiele des Erstellens von Blockschaltbildern erläutern und den in der Praxis stehenden Ingenieur darauf hinweisen, daß er komplizierte Differentialgleichungen und elektrische Netzwerke auf dem Umweg über die Blockschaltbildarstellung leichter numerisch berechnen kann.

3. Das Erstellen von Blockschaltbildern

a) Umformung eines dreistufigen RC-Filters in ein Blockschaltbild

An Hand des Bildes 2a kann man folgende Laplace-transformierte lineare Differentialgleichungen aufstellen, wobei die Anfangsbedingungen Null sind (*s* Laplace-Operator):

$$\begin{aligned}
 e_1 &= i_1 R_1 + u_1, & (1) \quad i_1 &= i_2 + u_1 s C_1, & (4) \\
 u_1 &= i_2 R_2 + u_2, & (2) \quad i_2 &= i_3 + u_2 s C_2, & (5) \\
 u_2 &= i_3 R_3 + e_2, & (3) \quad i_3 &= e_2 s C_3. & (6)
 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen kann man durch Umformen reduzieren:

$$\begin{aligned}
 i_2 &= e_2 s C_3 + u_2 s C_2, & (6) \rightarrow (5) &= (7) \\
 i_1 &= e_2 s C_3 + u_2 s C_2 + u_1 s C_1, & (7) \rightarrow (4) &= (8) \\
 e_1 &= e_2 s C_3 R_1 + u_2 s C_2 R_1 + u_1 (s C_1 R_1 + 1), & (8) \rightarrow (1) &= (9) \\
 u_1 &= e_2 s C_3 R_2 + u_2 (s C_2 R_2 + 1), & (7) \rightarrow (2) &= (10) \\
 u_2 &= e_2 (s C_3 R_3 + 1). & (6) \rightarrow (3) &= (11)
 \end{aligned}$$

Die Gln. (9), (10) und (11) lassen sich dann so schreiben, daß man Übertragungsfunktionen erhält:

$$\begin{aligned}
 e_2 &= u_2 G_1, & (11a) \\
 u_2 &= u_1 G_2 + e_2 G_3, & (10a) \\
 u_1 &= e_1 G_4 + e_2 G_5 + u_2 G_6. & (9a)
 \end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktionen $G_1(s) \dots G_6(s)$ und deren inverse Laplace-Transformationen $g_1(t) \dots g_6(t)$ lauten:

$$\begin{aligned}
 G_1(s) &= \frac{1}{T_3} \frac{1}{s + 1/T_3}, & (12) \\
 G_2(s) &= \frac{1}{T_2} \frac{1}{s + 1/T_2}, & (13) \\
 G_3(s) &= -\frac{C_3}{C_2} \frac{s}{s + 1/T_2}, & (14) \\
 G_4(s) &= \frac{1}{T_1} \frac{1}{s + 1/T_1}, & (15)
 \end{aligned}$$

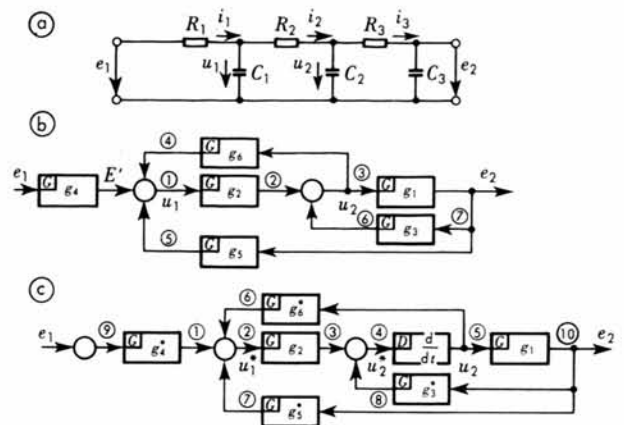


Bild 2. Darstellung eines dreistufigen RC-Filters: *a* als elektrisches Netzwerk, *b* als Blockschaltbild ohne Differentiations-Glied, *c* als Blockschaltbild mit Differentiations-Glied.

$$\begin{aligned}
 e_1(s) &= \frac{1}{s}; \quad E'(s) = e_1(s) \cdot G_4(s); \quad E'(t) = \frac{1}{T_1} (1 - e^{-t/T_1}). \\
 T_1 &= R_1 C_1, \quad T_2 = R_2 C_2, \quad T_3 = R_3 C_3.
 \end{aligned}$$

$$G_5(s) = -\frac{C_3}{C_1} \frac{s}{s+1/T_1}, \quad (16)$$

$$G_6(s) = -\frac{C_2}{C_1} \frac{s}{s+1/T_1}, \quad (17)$$

$$g_3(t) = e^{-t/T_3}/T_3, \quad (12a)$$

$$g_2(t) = e^{-t/T_2}/T_2, \quad (13a)$$

$$g_3(t) = -\frac{C_3}{C_2}(u(0) - e^{-t/T_2}/T_2), \quad (14a)$$

$$g_4(t) = e^{-t/T_1}/T_1, \quad (15a)$$

$$g_5(t) = -\frac{C_3}{C_1}(u(0) - e^{-t/T_1}/T_1), \quad (16a)$$

$$g_6(t) = -\frac{C_2}{C_1}(u(0) - e^{-t/T_1}/T_1), \quad (17a)$$

mit $T_1 = R_1C_1$, $T_2 = R_2C_2$, $T_3 = R_3C_3$ und $u(0)$ als Einheitsimpuls zur Zeit $t = 0$ (siehe Abschnitt 5).

Die Gln. (11a), (10a) und (9a) lassen sich in die Zeitebene transformieren und als Blockschaltung darstellen (Bild 2b). Die Multiplikation in der Frequenzebene geht dann in die reelle Faltung über:

$$e_2 = u_2 \cdot g_1 = \int_0^t u_2(\tau) \cdot g_1(t-\tau) \cdot d\tau, \quad (11b)$$

$$u_2 = u_1 \cdot g_2 + e_2 \cdot g_3, \quad (10b)$$

$$u_1 = e_1 \cdot g_4 + e_2 \cdot g_5 + u_2 \cdot g_6. \quad (9b)$$

Man kann diese Gleichungen auch so umgruppieren, daß das Blockschaltbild ein Differenzationsglied und solche Gewichtsfunktionsglieder enthält, deren Übertragungsfunktionen Nenner besitzen, die eine höhere Ordnung in s als die entsprechenden Zähler haben.

$$e_2 = u_2 G_1, \quad (11a^*)$$

$$u_2^* = \frac{u_2}{s} = u_1^* G_2 + e_2^* G_3^*, \quad (10a^*)$$

$$u_1^* = \frac{u_1}{s} = e_1^* G_4^* + e_2^* G_5^* + u_2^* G_6^*, \quad (9a^*)$$

mit $G_3^* = \frac{1}{s} G_3$, $G_4^* = \frac{1}{s} G_4$, $G_5^* = \frac{1}{s} G_5$, $G_6^* = \frac{1}{s} G_6$.

Die Gewichtsfunktionen $g_3^*(t) \dots g_6^*(t)$ sind:

$$g_3^*(t) = -\frac{C_3}{C_2} e^{-t/T_2}, \quad (18)$$

$$g_4^*(t) = \frac{1}{T_1} (1 - e^{-t/T_1}), \quad (19)$$

$$g_5^*(t) = -\frac{C_3}{C_1} e^{-t/T_1}, \quad (20)$$

$$g_6^*(t) = -\frac{C_2}{C_1} e^{-t/T_1}. \quad (21)$$

Werden die Gln. (11a*), (10a*) und (9a*) in der Zeitebene geschrieben, so lauten sie

$$e_2 = u_2 \cdot g_1, \quad (11a')$$

$$u_2^* = u_1^* \cdot g_2 + e_2^* \cdot g_3^*, \quad (10a')$$

$$u_1^* = e_1^* \cdot g_4^* + e_2^* \cdot g_5^* + u_2^* \cdot g_6^*. \quad (9a')$$

Bild 2c zeigt die Blockschaltung dieser Gleichungen.

Man kann die Gln. (11a), (10a) und (9a) noch weiter auf zwei Gleichungen reduzieren, wobei man aber Übertragungsfunktionen erhält, deren Pole ziemlich mühsam bestimmt werden müssen:

$$e_2 = u_1 G_7, \quad (22)$$

$$u_1 = e_1 G_8 + e_2 G_9, \quad (23)$$

$$\text{mit } G_7 = \frac{G_1 G_2}{1 - G_1 G_3}, \quad G_8 = \frac{G_4}{1 - G_2 G_6}, \quad G_9 = \frac{G_5 + G_3 G_6}{1 - G_2 G_6}.$$

In der Zeitebene ist

$$e_2 = u_1 \cdot g_7, \quad (22a)$$

$$u_1 = e_1 \cdot g_8 + e_2 \cdot g_9. \quad (23a)$$

Das entsprechende Blockschaltbild (Bild 3) enthält nun weniger Glieder.

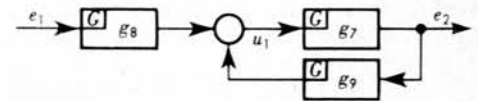


Bild 3. Die im Bild 2b gezeigte Blockschaltung wurde weiter reduziert und enthält nur die drei Übertragungsfunktionen G_7 , G_8 und G_9 , deren inverse Laplace-Transformationen g_7 , g_8 und g_9 aber nicht einer Tabelle entnommen werden können.

Das Eliminieren von Variablen und damit Verringern der Anzahl der Gleichungen entspricht dem Zusammenziehen von mehreren Gliedern des Blockschaltbildes nach den bekannten Regeln [1], [5].

Man kann Gl. (22) und Gl. (23) auf eine Gleichung zurückführen, so daß das Blockschaltbild auf ein Glied mit einer Übertragungsfunktion zusammenschrumpft, deren inverse Laplace-Transformation aber auf Schwierigkeiten stößt:

$$e_2 = e_1 \cdot G_{10}, \quad \text{mit } G_{10} = \frac{G_7 G_8}{1 - G_7 G_9}. \quad (24)$$

Aus dem Rechnungsgang ist zu ersehen, daß man ohne große Mühe und nach einem Schema auch andere lineare Schaltungen in Blockschaltbilder, deren Gewichtsfunktionsglieder sich mühelos bestimmen lassen, umformen kann.

b) Umformung einer nichtlinearen elektrischen Schaltung in ein Blockschaltbild

Im folgenden soll gezeigt werden, wie man eine elektrische Schaltung, die Halbleiter und Speicherelemente (Kondensatoren und Spulen) enthält, in ein Blockschaltbild umformt.

Bild 4a zeigt einen Spannungsverdoppler, dessen Ausgangswiderstand R mit einer Induktivität L behaftet ist. Zuerst werden die komplexen Grundgleichungen aufgestellt:

$$e_1 = i_1 \frac{1}{sC_1} + u_1, \quad (1)$$

$$u_1 = u_2 + e_2, \quad (2)$$

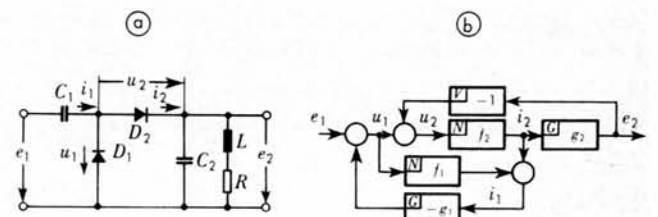


Bild 4.

a Schaltung eines Spannungsverdopplers, dessen Ausgangswiderstand R mit einer Induktivität L behaftet ist; b dazugehöriges Blockschaltbild.

$$e_2 = i_2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{R+sL} + sC_2} = i_2 \cdot \frac{1}{C_2} \cdot \frac{s+R/L}{s^2+s \cdot R/L+1/LC_2}, \quad (3)$$

$$i_1 = i_2 + f_1(u_1), \quad (4)$$

$$i_2 = f_2(u_2). \quad (5)$$

Stellt man diese Gleichungen etwas um, so erhält man:

$$u_1 = e_1 - i_1 G_1, \quad \text{mit } G_1 = \frac{1}{sC_1}, \quad (1a)$$

$$u_2 = u_1 - e_2, \quad (2a)$$

$$e_2 = i_2 G_2, \quad \text{mit } G_2 = \frac{1}{C_2} \cdot \frac{s+R/L}{s^2+s \cdot R/L+1/LC_2}, \quad (3a)$$

$$i_1 = i_2 + f_1(u_1), \quad (4a)$$

$$i_2 = f_2(u_2). \quad (5a)$$

Die Funktionen $f_1(u_1)$ und $f_2(u_2)$ können einem Dioden-Kennlinienblatt entnommen werden. Die inverse Laplace-Transformation für die Übertragungsfunktion G_2 kann man aus einer Tabelle [3], [4] ablesen. Die Gewichtsfunktion $L^{-1}\{G_1\} = g_1(t)$ entspricht einer Integration.

Die Gl. (1a) bis (5a) lauten als Funktionen der Zeit:

$$u_1 = e_1 - i_1 \cdot g_1, \quad (1b)$$

$$u_2 = u_1 - e_2, \quad (2b)$$

$$e_2 = i_2 \cdot g_2, \quad (3b)$$

$$i_1 = i_2 + f_1(u_1), \quad (4b)$$

$$i_2 = f_2(u_2). \quad (5b)$$

Diese Gleichungen sind im Bild 4b als Blockschaltung dargestellt.

c) *Umformung einer Differentialgleichung in ein Blockschaltbild mit einem nichtlinearen Übertragungsglied*

An Hand dieses Beispiels soll gezeigt werden, wie man auch nichtlineare Differentialgleichungen in ein Blockschaltbild umwandeln kann. Die nichtlinearen Differentialgleichungen werden dazu in mehrere Teile zerlegt, die sich in Laplace-transformierbare lineare Gleichungen und in nichtlineare Gleichungen trennen lassen. Die als Beispiel gewählte nicht-lineare Differentialgleichung wurde dem Werk [5], S. 560, entnommen. Sie beschreibt ein mechanisch-elektrisches Regelsystem und lautet

$$J \cdot \frac{d^2 e}{dt^2} + B \cdot \frac{de}{dt} + B_1 \cdot \left(\frac{de}{dt}\right)^3 = T. \quad (1)$$

Diese Gleichung kann man in drei besser zu handhabende simultane Gleichungen zerlegen:

$$J \cdot \frac{dq}{dt} + B \cdot q + B_1 \cdot p = T, \quad (2)$$

$$q = \frac{de}{dt}, \quad (3)$$

$$p = q^3 = f(q), \quad (4)$$

wobei e , q und p Funktionen der Zeit sind.

Durch weiteres Zerlegen erhält man zusätzliche Gleichungen:

$$z(t) = J \cdot \frac{dq}{dt} + B \cdot q. \quad (5)$$

Durch die Laplace-Transformation wird Gl. (5) zu

$$q(s) = z \cdot \frac{1}{B+Js}, \quad (5a)$$

und nach Rücktransformation in die Zeitebene ist

$$q(t) = z(t) * g_1(t), \quad (5b)$$

$$g_1(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1/J}{s+B/J} \right\} = e^{-Bt/J} / J. \quad (6)$$

Gl. (3) kann man auch wie folgt schreiben:

$$e(s) = q(s) \cdot \frac{1}{s}, \quad (7)$$

$$e(t) = q(t) * g_2(t), \quad (7a)$$

$$g_2(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} = 1. \quad (8)$$

Außerdem ist

$$T = z + B_1 p. \quad (9)$$

Die endgültigen Gleichungen für das Blockschaltbild (Bild 5) lauten:

$$z = T - B_1 p, \quad (9a)$$

$$q = z * g_1, \quad (5b)$$

$$p = f(q), \quad (4)$$

$$e = q * g_2. \quad (7a)$$

Gl. (4) stellt das nichtlineare Glied dar.

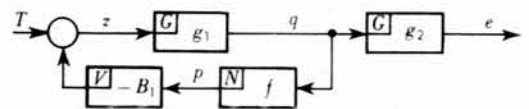


Bild 5. Darstellung der nichtlinearen Differentialgleichung

$$J \frac{d^2 e}{dt^2} + B \frac{de}{dt} + B_1 \left(\frac{de}{dt}\right)^3 = T$$

als Blockschaltbild.

d) *Umformung eines Systems von Differentialgleichungen in ein Blockschaltbild mit einem Multiplikationsglied*

Das Differentialgleichungssystem wurde dem Werk [6], S. 397, entnommen. Es beschreibt den Spaltungsprozeß eines Kernreaktors. Die im folgenden verwendeten Bezeichnungen bedeuten:

- n Neutronendichte zur Zeit $t > 0$,
- n_0 Neutronendichte zur Zeit $t = 0$ (Quellenneutronen),
- l Lebenszeit der Neutronen,
- i 1 bis 6,
- c_i Konzentration der Mutterkerne für die i -te Gruppe verzögerter Neutronen,
- λ_i Zerfallskonstante der Mutterkerne für die i -te Gruppe verzögerter Neutronen,
- β_i Anteil der i -ten Gruppe verzögerter Neutronen an der Gesamtneutronenzahl,
- ρ Reaktivität.

Der Spaltungsprozeß wird durch folgende acht Differentialgleichungen beschrieben:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{l} \cdot r - \frac{\beta}{l} n + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i, \quad (1)$$

$$r = \rho \cdot n, \quad (2)$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \beta_i \cdot n - \lambda_i c_i, \quad i = 1 \dots 6. \quad (3)$$

n , ρ , c_i und r sind Funktionen der Zeit.

Durch Einsetzen von (3) in (1) erhält man

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{l} \cdot r - \sum_{i=1}^6 \frac{dc_i}{dt} \quad (4)$$

Führt man nun die Laplace-Transformation für die Gln. (3) und (4) durch, so werden die Variablen n , q , c_i und r Funktionen der komplexen Frequenz s . Es ist dann

$$s \cdot c_i = \frac{\beta_i}{l} \cdot n - \lambda_i c_i \quad (3a)$$

$$c_i = \frac{\beta_i/l}{s + \lambda_i} \cdot n \quad (3b)$$

$$s \cdot n = \frac{1}{l} \cdot r - s \sum_{i=1}^6 c_i + n_0 \quad (4a)$$

$$n = \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{s} \cdot r - n \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i/l}{s + \lambda_i} + \frac{n_0}{s} \quad (4b)$$

Transformiert man die Gl. (4b) in die Zeitebene zurück, so wird

$$n = r * g_1 + n * g_2 + n_0 \quad (4c)$$

mit

$$g_1(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{l \cdot s} \right\} = \frac{1}{l} \quad (5)$$

$$g_2(t) = L^{-1} \left\{ - \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i/l}{s + \lambda_i} \right\} = - \sum_{i=1}^6 \beta_i/l \cdot e^{-\lambda_i \cdot t} \quad (6)$$

Die Gln. (2) und (4c) kann man nun als Blockschaltbild darstellen (Bild 6). Man kann aus dieser Blockschaltung auch leicht ersehen, daß ohne Quellenneutronen n_0 die Reaktivität q über das Multiplikationsglied nicht wirksam werden kann.

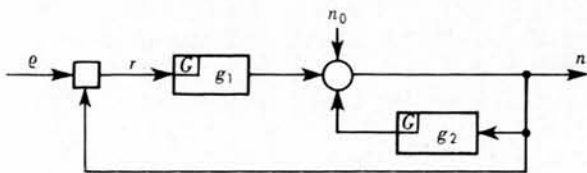


Bild 6. Blockschaltbild des Differentialgleichungssystems, das die Dynamik des Spaltungsprozesses eines Kernreaktors beschreibt.

$$g_1 = \frac{1}{l}; \quad g_2 = - \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{l} \cdot e^{-\lambda_i t}$$

4. Behandlung von Anfangswerten gewöhnlicher Differentialgleichungen am Beispiel elektrischer Netzwerke

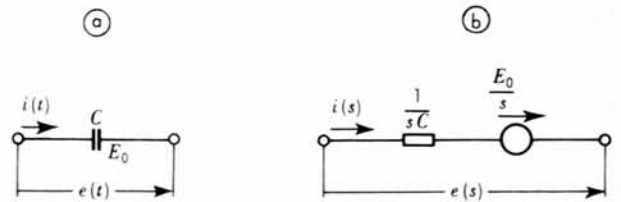
Die Laplace-Transformation gestattet eine einfache Berücksichtigung von Anfangswerten ([7], S. 74). So gelten für die einfache Differentiation und Integration folgende Transformationen:

$$L \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = sF(s) - f(0) \quad (1)$$

$$L \{ \int f(t) dt \} = \frac{F(s)}{s} + \frac{\int f(t) dt}{s} |_{t=0} \quad (2)$$

mit $L \{ f(t) \} = F(s)$.

Die Anfangswerte $f(0)$ bzw. $\int f(t) dt/t = 0$ sind Konstante. Treten solche Anfangswerte in Differentialgleichungen auf, die als Blockschaltbilder dargestellt sind, so wirken diese Anfangswerte wie externe Eingangssignale. Die Anfangswerte von Differentiationen und Integrationen höherer Ordnung können ähnlich behandelt werden.



$$e(t) = \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt$$

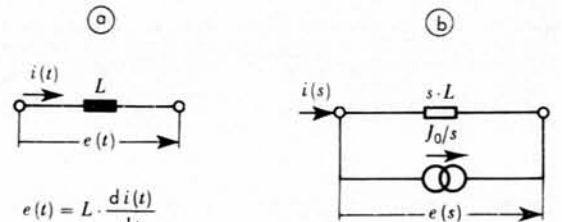
$$e(0) = E_0$$

$$e(s) = \frac{1}{sC} \cdot i(s) + \frac{E_0}{s}$$

Bild 7. Beziehung zwischen dem Strom i und der Spannung e bei Anfangsladung des Kondensators

a in der Zeitebene,
 b in der Frequenzebene.

Zur besseren Erläuterung soll der Anfangswert bei einem linearen elektrischen Netzwerk betrachtet werden. Im Bild 7 ist ein Kondensator gezeigt, der zum Zeitpunkt des Einschaltens ($t = 0$) eine Anfangsspannung E_0 aufweist. Führt man die Laplace-Transformation durch, so wirkt der Anfangswert formell wie eine in Reihe zum Kondensator geschaltete Batterie mit der Spannung E_0/s . Ähnlich verhält es sich mit einer Spule, durch die der Anfangsstrom I_0 fließt (Bild 8). Nach der



$$e(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int e(t) dt$$

$$i(0) = I_0$$

$$i(s) = \frac{1}{sL} \cdot e(s) + \frac{I_0}{s}$$

Bild 8. Beziehung zwischen dem Strom i und der Spannung e bei Anfangsstrom der Spule

a in der Zeitebene,
 b in der Frequenzebene.

Transformation erscheint dieser Strom als Parallelschaltung einer Stromquelle der Größe I_0/s zur Spule.

Will man die Ausgangsspannung e_a eines Netzwerks berechnen, das mehrere Anfangswerte enthält, so kann man diese Anfangswerte als Spannungs- bzw. Stromquellen auffassen. Die Einwirkung dieser Quellen auf die Ausgangsspannung läßt sich dann nach dem für lineare Netzwerke gültigen Überlagerungsprinzip getrennt betrachten.

Bild 9a zeigt ein einfaches Netzwerk mit einem Kondensator, der zur Zeit $t = 0$ auf die Spannung E_0 aufgeladen ist ([7], S. 81). Diese Spannung wird als Batterie in Reihe zum Kondensator eingetragen. Das Ausgangssignal e_a kann man nun durch Addition der beiden Signale e_{a1} und e_{a2} in dem Bild 9b und 9c leicht berechnen, wobei man zwei Übertragungsfunktionen $G_1(s)$ und $G_0(s)$ erhält.

Die Schaltung läßt sich dann in ein Blockschaltbild mit zwei Eingangssignalen, der Eingangsspannung e_i (beliebige Zeitfunktion) und der Anfangsspannung E_0 (Sprungfunktion), verwandeln (Bild 10).

Geht man von den komplexen Grundgleichungen

$$e_a = i \left(R_2 + \frac{1}{sC} \right) + E_0/s \quad (3)$$

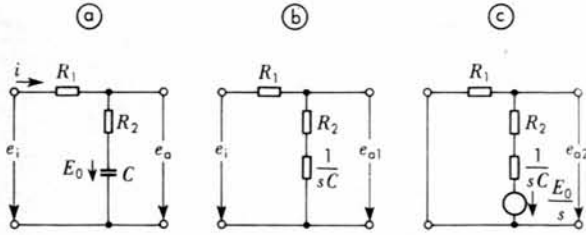


Bild 9.
 a Elektrisches Netzwerk mit der Anfangsspannung E_0 am Kondensator.
 b Netzwerk mit einer eingepprägten Spannung e_i zur Berechnung von e_{a1} .
 c Netzwerk mit einer eingepprägten Spannung E_0 (Sprungfunktion) zur Berechnung von e_{a2} .

$$e_a = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{s + 1/T_2}{s + 1/T_1} \cdot e_i(s) + \frac{s \cdot (1 - T_2/T_1)}{s + 1/T_1} \cdot \frac{E_0}{s}$$

$$e_a = e_{a1} + e_{a2}$$

$$T_1 = (R_1 + R_2) C,$$

$$T_2 = R_2 C.$$

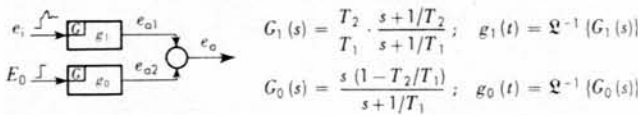


Bild 10. Reduziertes Blockschaltbild des im Bild 9 a dargestellten Netzwerks. Die Gewichtsfunktionen können nach Abschnitt 5 bestimmt werden.

$$e_i = i \cdot R_1 + e_a, \tag{4}$$

$$i = e_i/R_1 - e_a/R_1 \tag{4a}$$

aus, so kann man ein Blockschaltbild zeichnen, bei dem sich die Anfangsspannung E_0 direkt als Sprungfunktion zur Ausgangsspannung addiert (Bild 11).

Wird ein System mit mehreren Anfangswerten als Blockschaltbild dargestellt, so erscheinen diese Anfangswerte $A_1 \dots A_k$ als externe Eingangssignale, die direkt oder über die Gewichtsfunktionen $G_{01} \dots G_{0k}$ als Sprungfunktionen in das System eingespeist werden. Die anderen externen Eingangssignale sind beliebige Zeitfunktionen.

5. Inverse Laplace-Transformation einer Übertragungsfunktion, die aus einem Bruch zweier Polynome von gleicher, beliebiger Ordnung in s besteht

Die Übertragungsfunktion in Form eines Bruches zweier Polynome von gleicher, beliebiger Ordnung in s lautet

$$G(s) = k \frac{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}, \tag{1}$$

wobei $n = 1, 2 \dots$ betragen kann.

Da die inverse Laplace-Transformation von $G(s)$, also $g(t)$, nicht in den Transformationstabellen [3], [4] zu finden ist, soll

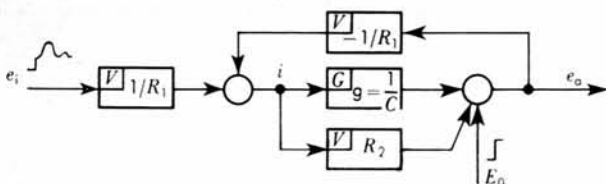


Bild 11. Blockschaltbild des im Bild 9 a dargestellten Netzwerks, bei dem die Anfangsspannung E_0 direkt als Sprungfunktion die Ausgangsspannung überlagert.

eine einfache Methode abgeleitet werden, mit der man diese Gewichtsfunktion leicht bestimmen kann.

Man ermittelt dazu die inverse Laplace-Transformation von

$$\bar{G}(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s). \tag{2}$$

Diese kann meistens leicht einer Transformationstabelle entnommen werden, da $\bar{G}(s)$ ein Nennerpolynom in s besitzt, das um eine Ordnung größer ist als das Zählerpolynom. Die inverse Funktion von \bar{G} , also $\bar{g}(t)$, hat zur Zeit $t = 0$ einen endlichen Wert, da

$$\lim_{t \rightarrow 0} s\bar{G}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \bar{g}(0) = k; \quad k \neq 0. \tag{3}$$

Die Gewichtsfunktion $\bar{g}(t)$ nimmt also zur Zeit $t = 0$ sprunghaft den Wert k an und strebt für $t \rightarrow \infty$ dem Wert k_∞ zu (der auch Null sein kann für $k_\infty = 0$), denn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s\bar{G}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = k_\infty. \tag{4}$$

Ersetzt man die unendlich große Steigung der Sprungstelle von $\bar{g}(t)$ in $t = 0$ durch eine endliche Steigung k/h (Bild 12) und differenziert man diese neue Zeitfunktion $\bar{g}^*(t)$, um $g(t)$ zu bilden, so entsteht zur Zeit $t = 0$ ein Impuls der Amplitude k/h und Breite h , also der Impulsfläche k , und eine stetige Funktion g_K^* für $t = +h$ bis $+\infty$.

Geht man nun zum Grenzwert $h \rightarrow 0$ über, so erhält man die Gewichtsfunktion $g(t)$. Diese setzt sich aus einer Impulsfunktion $g_J(t)$ für $t = 0$ und einer stetigen, differenzierbaren Funktion $g_K(t)$ für $t = +\infty$ bis $+0$ zusammen:

$$g_J(t) = k \cdot u(0), \tag{5}$$

$$g_K(t) = \frac{d(\bar{g}(t))}{dt} \text{ für } t \text{ von } +\infty \text{ bis } +0; \tag{6}$$

$u(0)$ Einheitsimpuls zur Zeit $t = 0$.

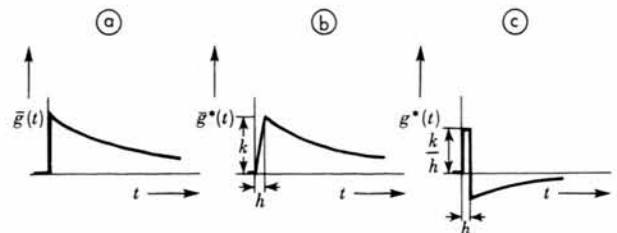


Bild 12.
 a Verlauf der integrierten Gewichtsfunktion $\bar{g}(t) = \int g(t) dt$;
 b Näherung $\bar{g}^*(t)$ der Funktion $\bar{g}(t)$;
 c Differentiation von $\bar{g}^*(t)$ ergibt die Näherung $g^*(t)$ der Gewichtsfunktion $g(t)$;
 $g(t) = \lim_{h \rightarrow 0} g^*(t)$.

Die vollständige Gewichtsfunktion ist also

$$g(t) = g_J(t) + g_K(t) = \bar{g}(0) \cdot u(0) + \frac{d(\bar{g}(t))}{dt} \tag{7}$$

Wird diese Gleichung als Blockschaltbild dargestellt, so erhält man die Parallelschaltung eines Verstärkergliedes und eines Gewichtsfunktionsgliedes (Bild 13). Die Verstärkung des Verstärkergliedes beträgt $\bar{g}(0)$ und die Gewichtsfunktion des Gewichtsfunktionsgliedes ist

$$\frac{d\bar{g}(t)}{dt}$$

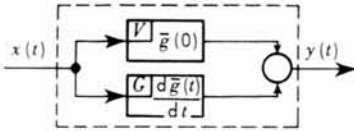


Bild 13. Darstellung einer Gewichtsfunktion $g(t)$ besonderer Art als Blockschaltung ($\bar{g}(t) = \int g(t) dt$). Die Übertragungsfunktion $G(s)$ dieses Gliedes ist ein Bruch zweier Polynome gleicher Ordnung in s .

So ist die inverse Laplace-Transformation der Übergangsfunktion 1. Ordnung, die häufig in Regelsystemen und elektrischen Netzwerken vorkommt,

$$G(s) = k \cdot \frac{s+b}{s+a} \quad (8)$$

und

$$g(t) = k \cdot u(0) + k \cdot (b-a) \cdot e^{-at} \quad (9)$$

Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man das System der oben angegebenen Übertragungsfunktion $G(s)$ mit einem Impuls erregt, den man sich als die Addition von zwei um h verschobenen Einheitssprungfunktionen vorstellt. Geht man zum Grenzwert $h \rightarrow 0$ über, so erhält man ebenfalls $g(t)$.

6. Schlussbemerkung

Durch die einheitliche Darstellung als Blockschaltbild können Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen, elektrische Netzwerke und technische Regelsysteme gleichermaßen mit den bekannten Methoden der Regelungstheorie behandelt werden. In [2] wird ein Verfahren beschrieben, wie man das zeitliche Verhalten von Systemen, die als beliebig vermaschte Blockschaltbilder angegeben sind, numerisch mit einem elektronischen Digitalrechner berechnen kann.

Literatur:

- [1] *Oppelt, W.*: Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge. Verlag Chemie, Weinheim (Bergstraße) 1956.
- [2] *Trauboth, H.*: Programmsystem zur Simulation allgemeiner Regelsysteme auf einem Digitalrechner. Regelungstechnik 13 (1965), in Vorbereitung.
- [3] *Doetsch, G.*: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation. R. Oldenbourg, München 1956.
- [4] *Gardner und Barnes*: Transients in Linear Systems. John Wiley, New York 1942.
- [5] *Truxal, J. G.*: Entwurf automatischer Regelsysteme. R. Oldenbourg, München 1960.
- [6] *Merz, L.*: Regelung und Instrumentierung von Kernreaktoren. R. Oldenbourg, München 1961.
- [7] *Chestnut und Mayer*: Servomechanism and Regulating Systems Design, Vol. I, John Wiley, New York 1951.

Die chemischen Reaktoren als Regelstrecke und ihre Dynamik

Von E. D. GILLES, Darmstadt

Teil II: Die technisch wichtigsten Reaktortypen

3. Anpassung der Bilanzgleichungen an die idealisierten Verhältnisse der technisch wichtigsten Reaktortypen

Die abgeleiteten Bilanzgleichungen eines chemischen Reaktionssystems sind in ihrer allgemeinen Form auch mit großen Digitalrechnern kaum lösbar. Dies leuchtet ein, wenn man bedenkt, daß die Lösung der hydrodynamischen Gleichungen für sich allein bereits ein schwieriges Problem darstellt. Daher ist es erforderlich, die in einem speziellen Reaktor vorliegenden Verhältnisse soweit wie irgend möglich zu idealisieren.

Die heute üblichen kontinuierlich betriebenen technischen Reaktoren lassen sich je nach ihrem Verweilzeitverhalten und ihrem Strömungszustand in zwei Grundformen unterteilen: die Reaktoren des Rührkesseltyps und die Rohrreaktoren. Beim Rührkesselreaktor verhindert im allgemeinen eine intensive Rührung des Reaktionsgemisches die Ausbildung örtlicher Gradienten der Temperatur und der Konzentrationen. Die Rückvermischung ist sehr stark und es besteht keine bevorzugte Strömungsrichtung. Demgegenüber besitzen die Reaktoren vom Typ des Strömungsrohres nur geringe Rückvermischung und eine bevorzugte Strömungsrichtung.

a) Rührkesselreaktor

Nimmt man vereinfachend an, daß sich beim Rührkesselreaktor durch eine intensive Rührung des Reaktionsgemisches die zufließenden Reaktanden unmittelbar und vollständig mit dem gesamten Reaktorinhalt vermischen, so erhält man

die erheblich vereinfachten Bilanzgleichungen des idealen Rührkesselreaktors. Es verschwinden alle in den Materialbilanzen und in der Wärmebilanz auftretenden Ausdrücke zur Beschreibung der Transportvorgänge durch Diffusion und Wärmeleitung identisch Null. Wegen der Annahme örtlich konstanter Reaktionsvariablen lassen sich die partiellen Differentialgleichungen zu gewöhnlichen vereinfachen.

Berücksichtigt man, daß sich der in der allgemeinen Form der Materialbilanz (2.13), also Teil I, Abschnitt 2, Gl. (13) auftretende Term $-\text{div}(\rho_i \vec{v}) dV$ beim Rührkesselreaktor entsprechend Bild 3 aus der Differenz des zufließenden und abfließenden Stoffstroms i ergibt, so erhält man mit den Volumengeschwindigkeiten q_E [m^3/s] und q_A [m^3/s] des Zu- und Ablaufs:

$$-\int_V \text{div}(\rho_i \vec{v}) dV = q_E \rho_{i0} - q_A \rho_i \quad (1)$$

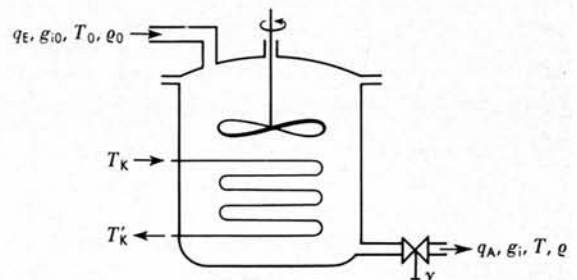


Bild 3. Rührkesselreaktor.