

linearen Kennlinie an einer beliebigen Stelle in den Regelkreis eingeführt werden; es müssen dort nur die stationären Werte von Einflußgrößen verfügbar sein.

Eine Möglichkeit dazu besteht darin, die Kennlinie des Stellgliedes nach der geforderten Abhängigkeit zu gestalten. Bei einem Ventil würde es sich dabei um die Öffnungskennlinie handeln, die den Zusammenhang zwischen dem freien Querschnitt und dem Hub angibt. Wird das Stellglied über ein Stellwerk (Stellungsregler) betätigt, so läßt sich für ein ansich lineares Ventil in vielen Fällen die gewünschte nichtlineare Beziehung dadurch einführen, daß man z. B. in die mechanische Rückführung Kurvenscheiben einbaut. Treten im Regelkreis elektrische Signale auf, so bietet sich die Verwendung von Kombinationen aus linearen und nichtlinearen Widerständen an.

Eine Gruppe von Geräten mit nichtlinearer Kennlinie, die sich besonders gut als Kompensationsglieder eignen, stellen die Multiplikatoren dar. Mit ihrer Hilfe läßt sich ein großer

Teil der gewünschten Abhängigkeiten zwischen Ausgangs- und Eingangsgröße nachbilden oder doch wenigstens annähern. Besonders günstig ist dabei das Verhalten der Geräte, bei denen im stationären Zustand Gleichgewicht zwischen zwei Produkten von je zwei Größen besteht. Wird die Ausgangsgröße mit A und die Eingangsgröße mit E_1 , E_2 und E_3 bezeichnet, so gilt im Gleichgewichtszustand

$$A \cdot E_1 = E_2 \cdot E_3.$$

Damit lassen sich alle im Bild 12 gezeigten Kennlinienformen verwirklichen.

Für

$$A = \frac{E_2 E_3}{E_1} \text{ und } E_3 = \text{konst}$$

ergibt sich die Kurvenschar von Bild 12a.

Macht man $E_2 = E_3$, so wird (Bild 12b)

$$A = \frac{E_2^2}{E_1},$$

und für $E_1 = A$ gilt (Bild 12c)

$$A = \sqrt{E_2 \cdot E_3}.$$

Auf diese Weise läßt sich eine ganze Reihe der häufig vorkommenden Kennlinien mit zwei unabhängigen Veränderlichen realisieren.

Literatur:

- [1] Eckman, D. P.: Automatic Process Control. John Wiley & Sons, New York 1958.
- [2] Strejc, V.: Näherungsverfahren für aperiodische Übergangscharakteristiken. Regelungstechnik 7 (1959), S. 124–128.
- [3] Harms, P. G.: Ein pneumatischer Kleinrechner. Regelungstechnische Praxis 2 (1960), S. 132–134.
- [4] Pütz, M.: Vorschläge zur Beseitigung der Wirkung von Nichtlinearitäten auf die Regelgüte verfahrenstechnischer Anlagen. Dissertation aus dem Institut für Regelungstechnik der TH Aachen, Juni 1962.

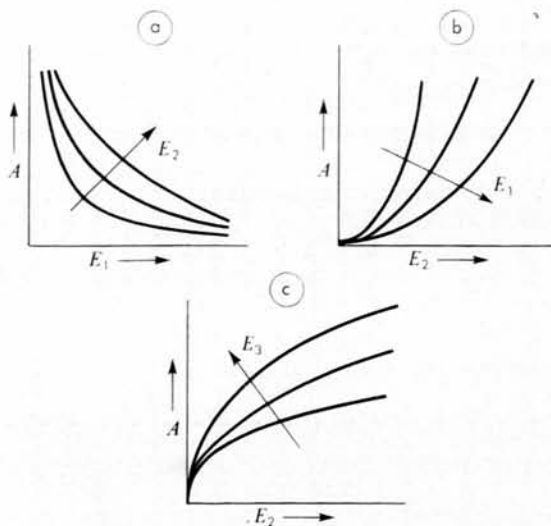


Bild 12. Funktionen zwischen Ausgangs- und Eingangsgrößen des Multiplikators.

Ein numerisches Verfahren zur Berechnung allgemeiner Regelsysteme

Von H. TRAUBOTH, München

Es wird ein numerisches Verfahren beschrieben, da seine einheitliche Berechnung der Ausgangssignale von beliebig vermaschten, allgemeinen Regelsystemen mit beliebig vielen Eingangssignalen erlaubt. Die Eingangssignale und Gewichtsfunktionen des Systems können beliebige, auch numerisch gegebene Zeitfunktionen sein. Das Verfahren eignet sich besonders gut zur Programmierung einer digitalen Rechenmaschine.

The author describes a numerical method which makes it possible to calculate the output signals of any kind of multiple-loop feed back system, having any number of input signals. The input signals and the weighting functions may be of any kind, even numerical time functions. This method is particularly suitable for programming a digital computer.

1. Einleitung

Die Kenntnis des dynamischen Verhaltens von technischen Systemen ist äußerst wichtig. Die Dynamik wird allgemein durch Differentialgleichungen beschrieben. Anschaulicher kann man aber ein System als Blockschaltbild, wie es zur Beschreibung von automatischen Regelsystemen üblich ist, darstellen [1], [2]. Der Begriff „Regelsystem“ sei hier im weiteren Sinne für physikalische Systeme verstanden, die als Blockschaltbilder angegeben werden können. So kann man ein elektrisches Netzwerk auch als Regelsystem bezeichnen, wenn es sich in ein Blockschaltbild umformen läßt [3]. Das Blockschaltbild besteht aus verschiedenartigen Gliedern, die zu einem stark vermaschten Gesamtsystem beliebig miteinander verbunden werden können. Man unterscheidet zwi-

schen linearen und nichtlinearen Systemen. Enthält das Blockschaltbild mindestens ein nichtlineares Glied, so wird das betreffende System als nichtlinear bezeichnet.

Die exakte analytische Berechnung selbst einfacher nichtlinearer und umfangreicher linearer Blockschaltbilder ist meistens nicht möglich oder die Rechnungen sind sehr mühsam. Die analytische Methode versagt gänzlich, wenn einige Zeitfunktionen nicht als analytischer Ausdruck, sondern als gemessene numerische Werte gegeben sind. Es soll hier nun eine numerische Methode gezeigt werden, die es erlaubt, alle Ausgangssignale eines beliebig vermaschten allgemeinen Regelsystems als Funktionen der Zeit einheitlich zu berechnen.

2. Aufbau des Blockschaltbildes

Das zu berechnende System soll in der universellen Darstellung als Blockschaltbild gegeben sein. Das Blockschaltbild ist aus mehreren rückwirkungsfreien Gliedern zusammengesetzt, die verschiedene Funktionen darstellen können (Bild 1), und zwar bei *linearen* Gliedern:

1. eine Gewichtsfunktion $g(t)$, die entweder als analytischer Ausdruck oder als numerische Wertetabelle bekannt ist;
 2. einen Integrator als Sonderfall der Gewichtsfunktion ($g(t) = 1$);
 3. einen Differentiator 1. Ordnung;
 4. eine Totzeit bekannter Länge;
 5. einen Verstärker bekannter positiver oder negativer Verstärkung;
 6. einen Summierer mit praktisch beliebig vielen Eingängen.
- Bei *nichtlinearen* Systemen kommen noch zwei Arten von Gliedern hinzu:
7. das nichtlineare Übertragungsglied;
 8. der Multiplikator mit praktisch beliebig vielen Eingängen.

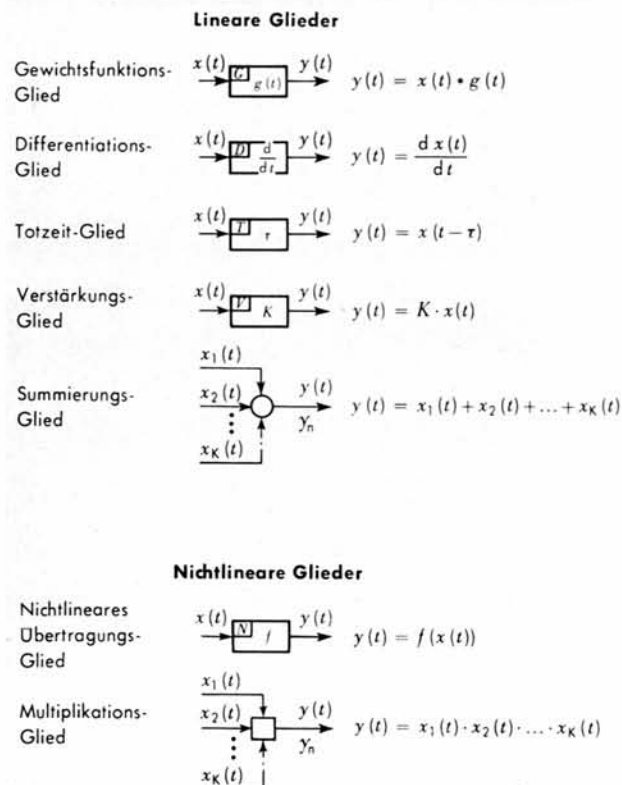


Bild 1. Die verschiedenartigen Glieder, aus denen ein Blockschaltbild zusammengesetzt sein kann, und die Beziehungen zwischen Eingangs- und Ausgangssignal als Funktionen der Zeit t .

Diese Glieder lassen ein Signal nur in einer Richtung durch. Sie können beliebig miteinander zu einem umfangreichen Gesamtsystem verknüpft werden. In das System können praktisch unbegrenzt viele Eingangssignale eingespeist werden, deren Zeitfunktionen entweder als analytischer Ausdruck oder als Wertetabelle bekannt sind und die auch Impulsfunktionen sein können. Die Anfangswerte werden dabei wie Eingangssignale behandelt.

Die in das System eingespeisten Signale werden vom Beginn an zur Zeit $t = 0$ in gleichbleibenden Abständen Δt durch das Blockschaltbild verfolgt. Dazu ist zu untersuchen, wie die verschiedenen Glieder ihre Eingangssignale verändern.

3. Die linearen Glieder des Systems

a) Diskrete Faltung beim Gewichtsfunktions-Glied

Legt man zur Zeit $t = 0$ im Ruhezustand an den Eingang eines linearen Systems einen Einheitsimpuls (Dirac-Stoß, Nadel-funktion), so erhält man am Ausgang dieses Systems als Antwort eine Zeitfunktion von $t = 0 \dots \infty$. Diese Zeitfunktion ist charakteristisch für das System und wird die Gewichtsfunktion $g(t)$ des Systems genannt. Erregt man nun von $t = 0$ beginnend das System mit einem Eingangssignal $x(t)$, das irgendeinen — auch einen analytisch nicht bekannten oder unstetigen — zeitlichen Verlauf haben kann, so ist das Ausgangssignal $y(t)$ durch das bekannte reelle Faltungsintegral gegeben [5]:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau; \quad (1)$$

oder abgekürzt:

$$y(t) = x(t) * g(t).$$

Die kontinuierlichen Zeitfunktionen, das sind die Gewichtsfunktion und das Ein- und Ausgangssignal, kann man durch ihre abgetasteten Zeitfunktionen annähern. Dadurch wird die kontinuierliche Funktion unter dem Integral

$$l(\tau) = x(\tau) \cdot g(t - \tau) \quad (2)$$

in eine diskrete Funktion verwandelt (Bild 2):

$$l(m \cdot \Delta t) = x(m \cdot \Delta t) \cdot g(n \cdot \Delta t - m \cdot \Delta t);$$

mit $\Delta t = \Delta \tau$ als Abtastintervall,

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots, n;$$

$$\text{oder } l(m \cdot \Delta t) = x(m \cdot \Delta t) \cdot g((n - m) \cdot \Delta t). \quad (3)$$

Um das Ausgangssignal y zur Zeit $t = n \cdot \Delta t$ zu erhalten, ist das Faltungsintegral durch eine Summation anzunähern. Diese Näherung kann bei gegebenem Abtastintervall Δt in Abhängigkeit von der Wahl des Polynoms, das die Impulsreihe $l(m \cdot \Delta t)$ stückweise annähert, mit verschiedener Genauigkeit erfolgen. Die reelle Faltung geht dann in folgende Reihe über:

$$y(n \cdot \Delta t) = \Delta t \sum_{m=0}^n b_m \cdot x(m \cdot \Delta t) \cdot g((n - m) \cdot \Delta t). \quad (4)$$

Die Werte der Koeffizienten b_m hängen vom Grad des Polynoms ab, mit dem die Integration angenähert wird. Bei der einfachsten Näherung, der linearen Näherung (Trapez-Regel [4]), ist

$$b_m = 1 \text{ für } m = 1, 2, \dots, (n - 1),$$

$$b_m = 0,5 \text{ für } m = 0 \text{ und } n.$$

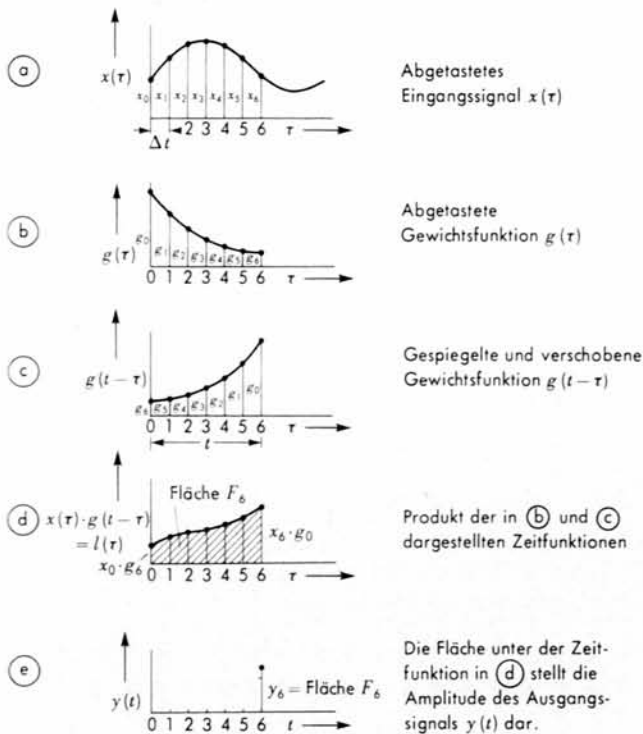


Bild 2. Graphische Darstellung der diskreten reellen Faltung.

Der einfacheren Schreibweise wegen wird im folgenden eine Funktion $f(m \cdot \Delta t)$ durch f_m angegeben.

Die Reihe (4) ist dem Ausdruck sehr ähnlich, den man erhält, wenn man die z-Transformationen der Impulsreihen von $x(t)$ und $g(t)$ miteinander multipliziert [5]. Die z-Transformation der Impulsreihe von $y(t)$ ist mit $z = e^{\Delta t \cdot s}$:

$$y(z) = x(z) \cdot g(z), \quad (5)$$

$$y(z) = \left(\sum_{m=0}^n x_m / z^m \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^n g_m / z^m \right). \quad (5a)$$

Durch Ordnen der Glieder nach Potenzen des Faktors $1/z$ für $m \leq n$ erhält man die Amplituden der Impulse in zeitlicher Reihenfolge. Für den n -ten Impuls ist der Faktor von $1/z^n$:

$$F_n = \sum_{m=0}^n x_m \cdot g_{n-m}. \quad (6)$$

Will man y_n wissen, so ist F_n noch mit Δt zu multiplizieren:

$$y_n = \Delta t \cdot F_n. \quad (7)$$

Gl. (7) stimmt mit Gl. (4) bis auf den Faktor $1/2$ im ersten und letzten Glied überein. Der Zusammenhang zwischen linearer Näherung der reellen Faltung und der z-Transformation wird oft übersehen, weshalb dann oft fälschlich nur das erste Glied der Reihe Gl. (7) halbiert wird.

Das kontinuierliche Eingangssignal kann von Impulsfunktionen $x_i(t)$ verschiedener Amplituden überlagert sein. Die Impulsfunktion $x_i(t_i)$ ist der Grenzwert eines Impulses der Amplitude x_i'/h und der Breite h , also der Impulsfläche $x_i' \cdot h/h = x_i'$, so daß gilt:

$$x_i(t_i) = \lim_{h \rightarrow 0} x_i' \cdot h/h = x_i' \cdot u(t_i), \quad (8)$$

mit $u(t_i)$ als Einheitsimpuls.

Solche Impulsfunktionen sind nur bei der Simulation von idealisierten Regelsystemen, die von Differentialgleichungen

abgeleitet werden, von Interesse. Sie dürfen auf keinen Fall vernachlässigt werden, da andernfalls erhebliche numerische Fehler auftreten.

Da das Gewichtsfunktions-Glied linear wirkt, kann man das Eingangssignal in einen kontinuierlichen Teil $x_k(t)$ und in einen Impulsanteil $x_l(t)$ zerlegen und dann die jeweiligen Ausgangssignale getrennt verfolgen.

Liegen mehrere Impulsfunktionen $x_i' \cdot u(t_i)$ zu verschiedenen Zeiten $T_i \cdot \Delta t$ am Eingang, so addieren sich deren Wirkungen:

$$y_{I,n} = \sum_{i=1}^d x_{T_i}' \cdot g_{n-T_i}; \quad (9)$$

d Anzahl der Impulsfunktionen.

Das vollständige Ausgangssignal y_n ist dann

$$y_n = y_{I,n} + y_{K,n} = \sum_{i=1}^d x_{T_i}' \cdot g_{n-T_i} + \Delta t \sum_{m=0}^n b_m \cdot x_{K,m} \cdot g_{n-m}. \quad (10)$$

Im Abschnitt 3c wird auch die quadratische Näherung (Simpson-Regel) für die Faltung angegeben, die im allgemeinen ausreichend genaue Resultate liefert. Näherungspolynome höherer Ordnung ergeben zwar bei gleichem Abtastintervall Δt noch größere Genauigkeit, sie führen aber zu unhandlicheren Reihen, da die Koeffizienten b_m zu viele verschiedene Werte aufweisen.

b) Interpolation über Abtasttheorem

Man kann nun zeigen, daß die lineare Interpolation ausreicht, wenn das Abtasttheorem von Shannon erfüllt ist.

Die Funktion $l^*(\tau)$ ist die abgetastete Funktion von $l(\tau)$ (Gl. 2); sie stellt eine Impulsreihe der Abtastfrequenz $f_A = 1/\Delta t$ dar. Nach dem bekannten Abtasttheorem von Shannon erhält man die vollständige kontinuierliche Funktion $l(\tau)$, wenn man die Impulsreihe $l^*(\tau)$ durch ein ideales Filter mit der Bandbreite $f_B = \frac{1}{2 \cdot \Delta t}$ und der Verstärkung $\Delta t/h (h \rightarrow 0)$ schickt.

Voraussetzung dafür ist allerdings, daß die im Frequenzspektrum des Signals $l(\tau)$ vorkommende höchste Frequenz kleiner ist als f_B .

Die Gewichtsfunktion eines Filters ist gleich der Antwort auf einen Einheitsimpuls. Wird zum Zeitpunkt $m \cdot \Delta t$ an das ideale Filter ein Einheitsimpuls angelegt, so erhält man als Antwort [13]

$$g(t - m \cdot \Delta t) = \frac{\sin \left[\frac{\pi}{\Delta t} (t - m \cdot \Delta t) \right]}{\frac{\pi}{\Delta t} (t - m \cdot \Delta t)}. \quad (11)$$

Dieses Filter ist fiktiv und läßt sich physikalisch nicht realisieren, da die Funktion g auch für die Zeit vor dem Eintreffen des Impulses, also zur Zeit $t < m \cdot \Delta t$, bekannt sein muß.

Die Summation der Antworten von $l^*_m = l^*(m \cdot \Delta t)$, $m = 0, 1, 2 \dots n$ ergibt dann $l(\tau)$ (Bild 3):

$$l(\tau) = \sum_{m=0}^n l_m \cdot \frac{\sin \left[\frac{\pi}{\Delta t} (\tau - m \cdot \Delta t) \right]}{\frac{\pi}{\Delta t} (\tau - m \cdot \Delta t)}. \quad (12)$$

Das Integral

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\tau=t} l(\tau) \cdot d\tau \quad (13)$$

wird durch Einsetzen von Gl. (12) in Gl. (13) für $t = n \cdot \Delta t$ zu

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\tau=n \cdot \Delta t} \sum_{m=0}^n \left(l_m \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta t} (\tau - m \cdot \Delta t)}{\frac{\pi}{\Delta t} (\tau - m \cdot \Delta t)} \right) d\tau. \quad (14)$$

Die untere Grenze des Integrals muß $-\infty$ sein, da die Funktion unter dem Integral auch für $\tau < 0$ endliche Werte hat.

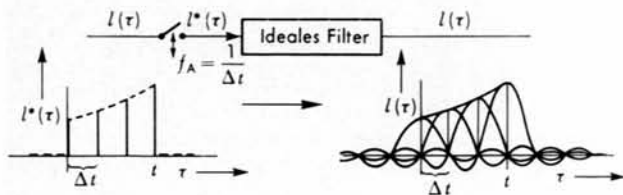


Bild 3. Umsetzung der Impulsreihe $l^*(\tau)$ in das kontinuierliche Signal $l(\tau)$ durch ein ideales Filter.

Durch Vertauschen des Integral- und Summationszeichens ist

$$y(t) = \sum_{m=0}^n l_m \int_{-\infty}^{n \cdot \Delta t} \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta t} (\tau - m \cdot \Delta t)}{\frac{\pi}{\Delta t} (\tau - m \cdot \Delta t)} \cdot d\tau. \quad (15)$$

Nach Gl. (4) ist

$$b_m \cdot \Delta t = Si(\tau) = \int_{-\infty}^{n \cdot \Delta t} \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta t} (\tau - m \cdot \Delta t)}{\frac{\pi}{\Delta t} (\tau - m \cdot \Delta t)} \cdot d\tau. \quad (16)$$

Durch Substitution

$$T = \frac{\pi}{\Delta t} (\tau - m \cdot \Delta t) \quad (17)$$

wird ersetzt

$$\begin{aligned} d\tau &\rightarrow \frac{\Delta t}{\pi} \cdot dT, \\ \tau = n \cdot \Delta t &\rightarrow T = \pi(n - m), \\ \tau = 0 &\rightarrow T = -m \cdot \pi, \\ \tau = -\infty &\rightarrow T = -\infty, \end{aligned}$$

so daß sich

$$b_m = \frac{1}{\pi} Si(T) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\pi(n-m)} \frac{\sin T}{T} dT \quad (18)$$

ergibt. Die Koeffizienten der Näherungsreihe sind also proportional dem Integralsinus mit den Grenzen $-\infty$ und $\pi(n-m)$.

Teilt man das Integral in zwei Hälften und berücksichtigt, daß

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\sin T}{T} dT = - \int_0^{\infty} \frac{\sin T}{T} dT = \int_0^{\infty} \frac{\sin T}{T} dT = \frac{\pi}{2} \quad (19)$$

ist, so wird

$$b_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi(n-m)} \frac{\sin T}{T} dT. \quad (20)$$

Nach [14], Tafel 2, ist (siehe Bild 4) für

$n-m=0,$	$m=n,$	$b_n=0,5;$
$n-m=1,$	$m=n-1,$	$b_{n-1}=1,0895;$
$n-m=2,$	$m=n-2,$	$b_{n-2}=0,9514;$
$n-m=3,$	$m=n-3,$	$b_{n-3}=1,0331;$
$n-m=4,$	$m=n-4,$	$b_{n-4}=0,9750.$

Bei linearer Interpolation sind die Koeffizienten

$$\begin{aligned} b_m &= 1 \quad \text{für } m=1, 2, \dots, n-1, \\ b_m &= 0,5 \quad \text{für } m=0 \text{ und } n. \end{aligned}$$

Während bei der linearen Interpolation die Koeffizienten b_m fest und unabhängig von der Länge der Reihe sind, und zwar 0,5 am Anfang und Ende sowie 1 für alle übrigen Werte der Reihe, schwingen bei der Interpolation über das Abtasttheorem die Koeffizienten mit einer maximalen Abweichung von etwa 9% um den Wert 1. Am Ende der Reihe ist der Koeffizient ebenfalls 0,5, am Anfang der Reihe aber annähernd 1. Wenn $l(0) = 0$ ist, dann wird der Koeffizient am Anfang der Reihe bedeutungslos, und damit wirkt sich der Unterschied des Wertes dieses Koeffizienten von 0,5 bei linearer Interpolation und 1 bei Interpolation über das Abtasttheorem nicht aus. Je länger die Reihe ist, desto mehr nähern sich die ersten Koeffizienten dem Wert 1. Man sieht daraus, daß vor allem bei langen Reihen die lineare Interpolation fast identisch der Interpolation über das Abtasttheorem ist.

Wenn man die Abtastfrequenz f_A so weit erhöht, daß die im Frequenzspektrum von $l(\tau)$ vorkommende höchste Frequenz kleiner ist als $\frac{1}{2} f_A$, so liefert die über das Abtasttheorem gefundene Interpolation die besten Ergebnisse. Die lineare Interpolation ist dieser Interpolation sehr ähnlich, so daß auf eine Interpolation mit Polynomen höherer Ordnung verzichtet werden kann, wenn das Abtasttheorem erfüllt ist¹⁾.

c) Beziehung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal des Gewichtsfunktions-Gliedes

Bei der Darstellung des Faltungsintegrals durch eine Reihe hängt der momentane Wert y_n des Ausgangssignals von allen vergangenen Eingangssignalwerten und vom gegenwärtigen Eingangssignalwert ab. Darin drückt sich der Speichereffekt dieses linearen Übertragungsgliedes aus. Wenn man die Einschränkung $x_n' \cdot g_0 = 0$ ($n = T_i$) macht, kann man schreiben:

$$y_n = P_n + Q_n \cdot x_n. \quad (21)$$

¹⁾ Der Verfasser dankt Herrn Prof. Dr. F. L. Bauer, München, für den Hinweis auf den Zusammenhang zwischen der linearen und einer über das Abtasttheorem gewonnenen Interpolation.

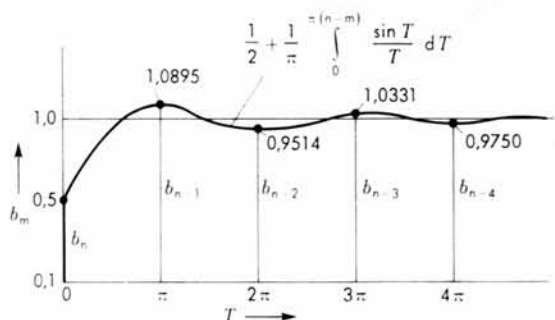


Bild 4. Verlauf des Integralsinus und der Koeffizienten b_m .

$$b_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi(n-m)} \frac{\sin T}{T} dT = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\pi(n-m)} \frac{\sin T}{T} dT.$$

P_n und Q_n sind Konstante, wenn man voraussetzt, daß die Eingangssignalwerte für $0 < t < n \cdot \Delta t$ bekannt sind.

Bei linearer Näherung des Faltungsintegrals ergeben sich folgende Formeln:

Für $n = 0$:

$$P_n = 0, \quad (22)$$

$$Q_n = 0. \quad (23)$$

Für $n > 0$:

$$P_n = \Delta t \sum_{m=0}^{n-1} b_m \cdot x_{k,m} \cdot g_{n-m} + \sum_{i=1}^d x'_{T_i} \cdot g_{n-T_i}, T_i < n, \quad (24)$$

mit $b_m = 0,5$ für $m = 0$,

$$b_m = 1 \quad \text{für } m = 1, 2 \dots n-1,$$

$$Q_n = \Delta t \cdot 0,5 \cdot g_0. \quad (25)$$

Bei quadratischer Näherung des Faltungsintegrals gilt:

Für $n = 0$:

$$P_n = 0, \quad (26)$$

$$Q_n = 0. \quad (27)$$

$n = \text{gerade Zahl}$

Für $n > 0$:

$$P_n = \Delta t \cdot 2/3 \sum_{m=0}^{n-1} b_m x_{k,m} g_{n-m} + \sum_{i=1}^d x'_{T_i} \cdot g_{n-T_i}, T_i < n, \quad (28)$$

mit $b_m = 0,5$ für $m = 0$,

$$b_m = 1 \quad \text{für } m = 2, 4, \dots n-2,$$

$$b_m = 2 \quad \text{für } m = 1, 3, \dots n-1,$$

$$Q_n = \Delta t \cdot 1/3 \cdot g_0. \quad (29)$$

$n = \text{ungerade Zahl}$

Für $n = 1$:

$$P_n = \Delta t \cdot 0,5 \cdot x_{k,0} \cdot g_1 + x'_{T_1} \cdot g_{n-T_1}, T_1 = 0, \quad (30)$$

$$Q_n = \Delta t \cdot 0,5 \cdot g_0. \quad (31)$$

Für $n > 1$:

$$P_n = \Delta t \cdot 2/3 \sum_{m=0}^{n-1} b_m x_{k,m} g_{n-m} + \sum_{i=1}^d x'_{T_i} \cdot g_{n-T_i}, T_i < n, \quad (32)$$

mit $b_m = 0,5$ für $m = 0$,

$$b_m = 1 \quad \text{für } m = 2, 4 \dots n-3,$$

$$b_m = 2 \quad \text{für } m = 1, 3 \dots n-2,$$

$$b_m = 1,25 \quad \text{für } m = n-1,$$

$$Q_n = \Delta t \cdot 0,5 \cdot g_0. \quad (33)$$

Ist das kontinuierliche Eingangssignal $x_k(t)$ zeitlich um $T \cdot \Delta t$ verschoben und enthält es zum Zeitpunkt $t = T \cdot \Delta t$ einen Sprung, so ergibt sich für alle Werte von n ($n = T, T+1 \dots$) der Fehler

$$y_f = \Delta t \cdot 0,5 x_T \cdot g_{n-T}, \quad (34)$$

wenn man diesen Fall nicht gesondert berücksichtigt.

d) Differentiations-Glied

Am Ausgang eines Differentiators erscheint die differenzierte Zeitfunktion des Eingangssignals:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}. \quad (35)$$

Im allgemeinen dürfen beliebige kontinuierliche Zeitfunktionen, die auch Sprünge aufweisen können, am Eingang anliegen. Impulsfunktionen sind nicht zugelassen, da diese zu Doppelimpulsfunktionen führen würden. Treten im Eingangssignal Sprünge zu den Zeitpunkten t_i auf, so entstehen am Ausgang zu diesen Zeiten Impulsfunktionen $y_i(t_i)$. Diese Impulsfunktionen kann man leicht anhand von Bild 5 ableiten.

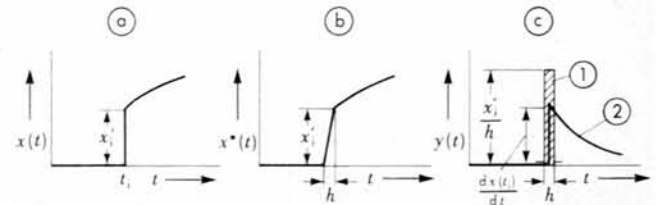


Bild 5. Die Entstehung einer Impulsfunktion am Ausgang eines Differentiations-Gliedes durch einen Sprung am Eingang.

a) Eingangssignal $x(t)$,

b) Näherung $x^*(t)$ des Eingangssignals $x(t)$,

c) Ausgangssignal $y(t) = y_i(t_i) + y_k(t)$.

1 Impulsfunktion $y_i(t_i) = \lim_{h \rightarrow 0} x'_i \cdot h/h$,

2 Kontinuierliche Funktion $y_k(t)$.

Nähert man die unendliche Steigung im Punkt t_i durch den endlichen Anstieg x'_i/h an, so erhält man am Ausgang einen Impuls der Amplitude x'_i/h und der Breite h . Die Impulsfläche ist also x'_i . Geht man nun zum Grenzwert $h \rightarrow 0$ über, so erhält man die Impulsfunktion $y_i(t_i) = x'_i \cdot u(t_i)$, wobei $u(t_i)$ die Einheitsimpulsfunktion ist.

Den kontinuierlichen Teil $y_k(t)$ des Ausgangssignals $y(t)$ erhält man durch Differentiation des differenzierbaren Teils des Eingangssignals. Die Ausgangsfunktion $y(t)$ setzt sich also aus der Überlagerung einer kontinuierlichen Zeitfunktion $y_k(t)$ und den Impulsfunktionen $y_i(t_i)$ zusammen. Sind nur diskrete Werte der Eingangsfunktion im Abstand Δt bekannt, so kann man die Zeitfunktion $x(t)$ ähnlich wie bei der Integration abschnittsweise durch Polynome annähern. Die Genauigkeit der Näherung nimmt auch hier mit wachsender Ordnung des Näherungspolynoms zu, wodurch allerdings die entstehende Reihe weniger bequem zu handhaben wird.

Bei Näherung der Ausgangsfunktion $y_k(t)$ durch vergangene diskrete Werte und den gegenwärtigen diskreten Wert der Eingangsfunktion stehen zu Beginn der Simulation nicht genügend diskrete Werte zur Verfügung, weshalb sich der Grad der Näherungspolynome für die ersten diskreten Zeitpunkte ändert. Er erhöht sich gegenüber dem vorhergehenden Zeitpunkt um den Grad 1 so lange, bis die Anzahl der bekannten, vergangenen diskreten Werte des Eingangssignals gleich dem Grad des Näherungspolynoms ist, das als endgültig ausgewählt wurde. Der Grad 4 dürfte im allgemeinen ausreichen. Zur Zeit $t = 0$ ist die Steigung nicht bekannt, da keine diskreten Werte $x_{-1}, x_{-2} \dots$ der Eingangsfunktion vorliegen. Es wird deshalb die Steigerung Null angenommen. Die diskreten Werte $y_{k,n}$ des Ausgangssignals errechnen sich dann aus folgenden Gleichungen [6]:

$$n=0: y_{k,n} = 0; \quad (36)$$

$$n=1: y_{k,n} = \frac{1}{\Delta t} (-x_{n-1} + x_n); \quad (37)$$

$$n=2: y_{k,n} = \frac{1}{2 \cdot \Delta t} (x_{n-2} - 4x_{n-1} + 3x_n); \quad (38)$$

$$n=3: y_{k,n} = \frac{1}{6 \cdot \Delta t} (-2x_{n-3} + 9x_{n-2} - 18x_{n-1} + 11x_n); \quad (39)$$

$$n \geq 4: y_{k,n} = \frac{1}{12 \cdot \Delta t} (3x_{n-4} - 16x_{n-3} + 36x_{n-2} - 48x_{n-1} + 25x_n). \quad (40)$$

Die Annahme, daß zur Zeit $t = 0$ die Steigung des differenzierbaren Teils der Eingangsfunktion $x(t)$ Null ist, kann bei der Berechnung der Signale des Gesamtsystems in der Nähe von $t = 0$ zu einem fehlerhaften Ausgangssignal $y_k(t)$ führen. Dies läßt sich dadurch ausgleichen, daß in der Nähe von $t = 0$ mit einem besonders kleinen Δt gerechnet wird. Liegt am Eingang des Differentiations-Gliedes eine Sprungfunktion, so erhält man keinen Fehler, da die Steigung des differenzierbaren Teils für $t = 0$ Null ist. Das vollständige Ausgangssignal entsteht aus der Summe der Impulsfunktionen $y_{i,n}$ und der kontinuierlichen Funktion $y_{k,n}$:

$$y_n = y_{k,n} + y_{i,n}. \quad (41)$$

Auch hier kann zwischen dem Teil P_n , der durch die stetigen Eingangssignalwerte der Vergangenheit gebildet wird, und dem Teil $Q_n x_n$ der Gegenwart unterschieden werden. Es ergeben sich dann folgende lineare Beziehungen:

$$y_n = P_n + Q_n x_n + \sum y_{i,n}. \quad (42)$$

$$n=0: P_n=0, \quad (43)$$

$$Q_n=0; \quad (44)$$

$$n=1: P_n = \frac{-1}{\Delta t} x_{n-1}, \quad (45)$$

$$Q_n = \frac{1}{\Delta t}; \quad (46)$$

$$n=2: P_n = \frac{0,5}{\Delta t} (x_{n-2} - 4x_{n-1}), \quad (47)$$

$$Q_n = \frac{1,5}{\Delta t}; \quad (48)$$

$$n=3: P_n = \frac{1}{3 \cdot \Delta t} (-x_{n-3} + 4,5x_{n-2} - 9x_{n-1}), \quad (49)$$

$$Q_n = \frac{11}{6 \cdot \Delta t}; \quad (50)$$

$$n \geq 4: P_n = \frac{1}{4 \cdot \Delta t} \left(x_{n-4} - \frac{16}{3} x_{n-3} + 12x_{n-2} - 16x_{n-1} \right), \quad (51)$$

$$Q_n = \frac{25}{12 \cdot \Delta t}. \quad (52)$$

e) Totzeit-Glied

Ein Totzeit-Glied verzögert das Eingangssignal um die Zeit τ :

$$y(t) = x(t - \tau). \quad (53)$$

Wenn τ ein Vielfaches der Abtastperiode Δt ($\tau = T \cdot \Delta t$) ist, dann ergeben sich folgende Beziehungen:

$$y_n = P_n + Q_n x_n, \quad (54)$$

$$Q_n = 0. \quad (55)$$

$$\text{für } n < T: P_n = 0; \quad (56)$$

$$\text{für } n \geq T: P_n = x_{n-T}. \quad (57)$$

Das momentane Ausgangssignal y_n ist also nur von einem vergangenen Eingangssignal x_{n-T} abhängig.

Ist τ kein Vielfaches von Δt , so kann man zwischen zwei oder mehreren diskreten Werten, die in der Nähe des Zeitpunktes $n \cdot \Delta t - \tau$ liegen, interpolieren. Bei linearer Interpolation erhält man, wenn $r = \tau$ modulo Δt ist:

$$\text{für } n \cdot \Delta t < \tau: P_n = Q_n = 0; \quad (58)$$

$$\text{für } n \cdot \Delta t \geq \tau \geq \Delta t: P_n = x_{n-T} - \frac{r}{\Delta t} (x_{n-T} - x_{n-1-T}), \quad (59)$$

$$Q_n = 0; \quad (60)$$

$$\text{für } \tau < \Delta t: P_n = \frac{\tau}{\Delta t} \cdot x_{n-1} \quad (r = \tau, T = 0); \quad (61)$$

$$Q_n = 1 - \frac{\tau}{\Delta t}. \quad (62)$$

Die genauere quadratische Interpolation liefert kompliziertere Formeln, die aber leicht abzuleiten sind.

f) Verstärkungs-Glied

Der Verstärker erhöht die Amplitude des momentanen Eingangssignalwerts ohne Zeitverzögerung um den Betrag $\pm K$:

$$y(t) = K \cdot x(t). \quad (63)$$

Betrachtet man nur den diskreten Zeitpunkt $t = n \cdot \Delta t$, so lautet die Beziehung

$$y_n = Q_n x_n, \quad (64)$$

$$P_n = 0, \quad (65)$$

$$Q_n = K. \quad (66)$$

Das momentane Ausgangssignal ist also nur vom momentanen Eingangssignal abhängig.

g) Summierungs-Glied

Im Gegensatz zu den bisher beschriebenen Gliedern kann der Summierer beliebig viele Eingänge enthalten. Das Ausgangssignal ist ohne zeitliche Verzögerung die Summe der Eingangssignale $x_{a1}(t) \dots x_{at}(t)$:

$$y(t) = \sum_{p=a_1}^{a_t} x_p(t). \quad (67)$$

Betrachtet man hier auch nur den diskreten Zeitpunkt $t = n \cdot \Delta t$, so erhält man

$$y_n = \sum_{p=a_1}^{a_t} x_{np}. \quad (68)$$

Diese Summe setzt sich aus Eingangssignalen E_{np} zusammen, die von außen in das Gesamtsystem eingespeist werden (externe Eingangssignale) und bekannt sind, sowie aus Eingangssignalen, die Ausgangssignale x_{np} von anderen Gliedern des Systems sind (interne Signale):

$$y_n = \sum_{p=b_1}^{b_u} E_{np} + \sum_{p=c_1}^{c_v} x_{np}, \quad (69)$$

$$y_n = P_n + \sum_{p=c_1}^{c_v} Q_{np} x_{np}, \quad (70)$$

$$P_n = \sum_{p=b_1}^{b_u} E_{np}, \quad (71)$$

$$Q_{np} = 1. \quad (72)$$

Die Indizes $c_1 \dots c_v$ können irgendwelche ganze Zahlen zwischen 1 und S sein, wobei S die Anzahl der im System vor-

handenen internen Ausgangssignale ist. Die Indizes $b_1 \dots b_u$ können irgendwelche ganze Zahlen zwischen 1 und F sein, wobei F die Anzahl der externen Eingangssignale ist.

h) Zusammenfassung von linearen Gliedern

Um die Zahl der Ausgangssignale im System möglichst klein zu halten, werden alle linearen Glieder beliebiger Art, die unmittelbar an den Eingängen eines Summierers liegen, als Teile eines einzigen zusammengefaßten Gliedes angesehen (Bild 6). Die unmittelbaren Ausgangssignale der linearen

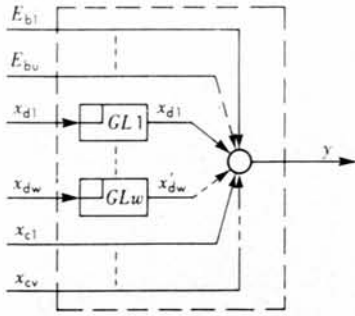


Bild 6. Zusammengefaßtes lineares Glied. GL lineare Glieder.

Glieder GL1—GLu werden nicht berechnet. Für das zusammengefaßte lineare Glied ergibt sich folgende lineare Beziehung:

$$y_n = P_n + \sum_{p=c_1}^{c_v} x_{np} + \sum_{p=d_1}^{d_w} Q_{np} \cdot x_{np}, \quad (73)$$

$$P_n = \sum_{p=b_1}^{b_u} E_{np} + \sum_{p=d_1}^{d_w} P_{np}. \quad (74)$$

Die Indizes $c_1 \dots c_v$ und $d_1 \dots d_w$ können irgendwelche ganze Zahlen zwischen 1 und S sein.

4. Nichtlineare Glieder

Das zu simulierende System kann auch nichtlineare Glieder enthalten, die ihre Eingangssignale nur in Abhängigkeit von der Amplitude verändern.

a) Das nichtlineare Übertragungs-Glied

Die Beziehung zwischen Eingangssignal und Ausgangssignal eines nichtlinearen Glieds lautet

$$y(t) = f(x(t)), \quad (75)$$

wobei f eine beliebige Funktion bedeutet.

Für den diskreten Zeitpunkt $n \cdot \Delta t$ ist

$$y_n = f(x_n). \quad (76)$$

Anstelle eines Polynoms höherer Ordnung kann die Funktion auch durch mehrere Polynome 1. Ordnung, die jeweils nur in einem bestimmten Bereich gelten, gegeben sein. So lassen sich die Kennlinien vieler Bauelemente gut durch ein- oder mehrfach geknickte Gerade annähern.

b) Multiplikations-Glied

Sind zwei oder mehrere Zeitfunktionen miteinander zu multiplizieren, so gilt folgende Beziehung

$$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \dots \cdot x_K(t). \quad (77)$$

Für den diskreten Zeitpunkt wird einfach

$$y_n = x_{n1} \cdot x_{n2} \dots \cdot x_{nK}. \quad (78)$$

5. Verknüpfung der Glieder zu einem Gesamtsystem

a) Lineares Gesamtsystem

Verbindet man die einzelnen linearen Glieder beliebig miteinander, so erhält man ein vermaschtes lineares Gesamtsystem, in das praktisch beliebig viele Eingangssignale an beliebigen Punkten eingespeist werden können. Zur Berechnung der Ausgangssignale aller Glieder des linearen Systems ist in der zeitlichen Reihenfolge $t = 0, \Delta t, 2 \cdot \Delta t \dots$ für jeden diskreten Zeitpunkt ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Dieses ergibt sich aus den linearen Beziehungen zwischen den jeweiligen Eingangs- und Ausgangssignalen der einzelnen Glieder, wie sie im Abschnitt 3 beschrieben wurden, und zwar in der allgemeinen Form

$$y_n = P_n + \sum_{p=K_1}^{K_2} Q_{np} \cdot x_{np}. \quad (79)$$

Jedes interne Eingangssignal eines Gliedes ist gleichzeitig das Ausgangssignal eines anderen Gliedes. Es wird deshalb nur mehr von Ausgangssignalen gesprochen.

Man numeriert die Ausgänge der einzelnen Glieder in beliebiger Reihenfolge $i = 1, 2, 3 \dots S$, das System enthält also S Glieder und S Ausgangssignale. Für den Zeitpunkt $t = n \cdot \Delta t$ ist zur Berechnung der Ausgangssignale x_{ni} ($i = 1, 2, 3 \dots S$) dann folgendes lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\mathcal{A}_n x_n = b_n, \quad (80)$$

mit

$$\mathcal{A}_n = \begin{bmatrix} a_{n11} & a_{n12} & \dots & a_{n1s} \\ a_{n21} & a_{n22} & \dots & a_{n2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ns1} & a_{ns2} & \dots & a_{nss} \end{bmatrix}, \quad x_n = \begin{bmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \\ \vdots \\ x_{ns} \end{bmatrix}, \quad b_n = \begin{bmatrix} b_{n1} \\ b_{n2} \\ \vdots \\ b_{ns} \end{bmatrix}. \quad (81)$$

Der erste Index gibt den Zeitpunkt $n \cdot \Delta t$ an, während der zweite Index die Nummer des entsprechenden Ausgangssignals trägt. Hierbei sind die Konstanten

$$a_{niv} = 1 \text{ für } v = i \text{ (Diagonale der Matrix)}. \quad (82)$$

Jede Zeile des Gleichungssystems (80) charakterisiert ein bestimmtes Glied. So gehört Zeile 1 zum Glied 1 (das ist das Glied mit der Ausgangssignal-Nr. 1), Zeile 2 zum Glied 2 etc. Die Konstanten $a_{niv} \neq 0, v \neq i$ ($v = 1 \dots S$) entsprechen den Q_n und die b_{ni} den P_n der verschiedenen Glieder des Gesamtsystems und sind aus Abschnitt 3 zu entnehmen. Die Matrix $\mathcal{A}$ ist für alle Zeitpunkte ($t > 0$) konstant, es ändern sich nur die rechten Seiten b , wenn man die Faltung und Differentiation linear annähert. Bei quadratischer Näherung der Faltung erhält man zwei verschiedene Matrizen $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$.

b) Nichtlineares Gesamtsystem

Läßt man neben den linearen Gliedern auch nichtlineare Glieder zu, so führt die Berechnung der verschiedenen Ausgangssignale für jeden Zeitpunkt $t = 0, \Delta t, 2 \cdot \Delta t \dots n \cdot \Delta t$ auf die Auflösung eines nichtlinearen Gleichungssystems. Diese nichtlinearen Gleichungen führen theoretisch zu mehrdeutigen Lösungen, von denen eine ausgewählt werden muß, da vom physikalischen Standpunkt nur eine einzige Lösung sinnvoll ist.

Das nichtlineare Gleichungssystem läßt sich in einen linearen und einen nichtlinearen Teil zerlegen. Der lineare Teil besteht aus linearen Gleichungen, wie sie im Abschnitt 3 beschrieben sind. Jede dieser linearen Gleichungen L_{ni} ist von der Form

$$\sum_{j=1}^S a_{nij} x_{nj} - b_{ni} = 0. \quad (83)$$

Der nichtlineare Teil setzt sich aus nichtlinearen Gleichungen der beiden Arten

$$x_{ni} + f(x_{nj}) = 0, \quad i \neq j; \quad (84)$$

$$x_{ni} - x_{nj1} \cdot x_{nj2} \cdots x_{njK} = 0, \quad j_1 \neq j_2 \neq \cdots j_K \quad (85)$$

zusammen.

Der Index n gibt den Zeitpunkt an, der Index i die Ausgangsnummer und j die Eingangsnummern des betreffenden Gliedes. Gl. (83) rührt von den linearen Gliedern, Gl. (84) von den nichtlinearen Übertragungsgliedern und Gl. (85) von den Multiplikations-Gliedern her.

6. Numerische Lösung allgemeiner algebraischer Gleichungssysteme

a) Allgemeine lineare Gleichungssysteme

Die Berechnung allgemeiner linearer Regelsysteme führt, wie wir gesehen haben, für jeden Zeitpunkt $n \cdot \Delta t$ zur Auflösung simultaner linearer Gleichungen der Form

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{b}. \quad (86)$$

Die Matrix $\mathfrak{A}$ kann von beliebigem Aufbau sein; denn es sollen keine Einschränkungen bezüglich der Struktur und der Parameter des Regelsystems gefordert werden. Es können also auch die Seitenglieder gegenüber den Diagonalgliedern der Matrix überwiegen. Die Matrix kann voll, sie kann aber auch spärlich besetzt sein. Man kann nur die pauschale Aussage treffen, daß die Matrix desto stärker besetzt ist, je größer die Zahl der Rückkopplungen im Regelsystem ist (Bild 7 und Bild 8).

In Gl. (86) sind die nichtsinguläre Matrix $\mathfrak{A}$ und die rechten Seiten $\mathfrak{b}$ bekannt, gesucht ist der Lösungsvektor

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{b}. \quad (87)$$

Ist die Lösung des linearen Gleichungssystems Gl. (86) mehrmals durchzuführen und ändern sich dabei nur die rechten Seiten $\mathfrak{b}$, so braucht man die Kehrmatrix $\mathfrak{A}^{-1}$ aus $\mathfrak{A}$ nur einmal auszurechnen. Die verschiedenen Lösungen erhält man dann durch einfaches Einsetzen von $\mathfrak{b}$ in Gl. (87).

Die Kehrmatrix $\mathfrak{A}^{-1}$ kann durch wiederholte Austauschschritte gebildet werden. Die Anzahl der wesentlichen Rechenoperationen wird aber auf die Hälfte herabgesetzt, wenn man das Gauß-Jordan-Verfahren verwendet und die Kehrmatrix in abgewandelter Form, als sogenannte Frobenius-Spalten, schreibt [7], [8], [9], [12].

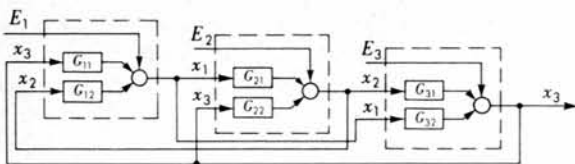


Bild 7. Blockschaltbild eines Regelsystems, das eine vollbesetzte Matrix $\mathfrak{A}$ ergibt.

Das Glied G kann ein Verstärker-, Differentiations- oder Gewichtsfunktions-Glied (mit endlichem g_0) sein.

Voraussetzung ist die Bildung zusammengefaßter (gestrichelt gezeichneter) Glieder.

$$\begin{aligned} 1) \quad & x_1 = P_1 + Q_{11}x_3 + Q_{12}x_2 \\ 2) \quad & x_2 = P_2 + Q_{21}x_1 + Q_{22}x_3 \\ 3) \quad & x_3 = P_3 + Q_{31}x_2 + Q_{32}x_1 \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} 1 & -Q_{12} & -Q_{11} \\ -Q_{21} & 1 & -Q_{22} \\ -Q_{32} & -Q_{31} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{p}.$$

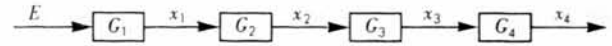


Bild 8. Blockschaltbild eines Regelsystems, das eine spärlich besetzte Matrix $\mathfrak{A}$ ergibt.

$$\begin{aligned} 1) \quad & x_1 = P_1 \\ 2) \quad & x_2 = P_2 + Q_2x_1 \\ 3) \quad & x_3 = P_3 + Q_3x_2 \\ 4) \quad & x_4 = P_4 + Q_4x_3 \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{p}.$$

Die Koeffizienten Q können Null sein, wenn die Glieder G Totzeit-Glieder oder Gewichtsfunktions-Glieder, deren g_0 gleich Null ist, darstellen. Die Matrix $\mathfrak{A}$ schrumpft dann auf die Einheitsmatrix zusammen.

b) Allgemeine nichtlineare Gleichungssysteme

Enthält das zu simulierende System nichtlineare Glieder, so muß für jeden Zeitpunkt $n \cdot \Delta t$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden:

$$\psi_i(x_1, x_2, \dots, x_s) = \psi_i(\mathfrak{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, S. \quad (88)$$

In einfachen Fällen läßt sich ein solches Gleichungssystem durch ein analytisches Verfahren direkt lösen. Um allgemeine nichtlineare Gleichungssysteme zu lösen, muß man auf iterative Verfahren zurückgreifen, von denen die Methode des „steilsten Abstiegs“ (Steepest Descent oder Gradientenmethode) besonders geeignet zu sein scheint [10], [11].

Voraussetzung für dieses Verfahren ist allerdings, daß man die ungefähre Lösung bereits kennt.

Bei diesem Verfahren wird die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems auf die Lösung einer einzigen nichtlinearen Gleichung zurückgeführt. Zu diesem Zweck wird folgende Funktion gebildet:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_s) = \varphi(\mathfrak{x}) = \sum_{i=1}^S \psi_i^2. \quad (89)$$

Für die Lösungen der Gl. (88) wird auch diese Funktion zu Null und sie ist für andere Werte größer als Null. Da man die Lösung nicht auf analytischem Wege exakt finden kann, geht man von den Näherungslösungen

$$\mathfrak{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_s^{(0)}) \quad (90)$$

aus und verbessert diese Lösungen fortlaufend durch Iteration. Als $\mathfrak{x}^{(0)}$ für den Zeitpunkt $n \cdot \Delta t$ kann man die Lösung $\mathfrak{x}$ des vorhergehenden Zeitpunkts $(n-1) \cdot \Delta t$ verwenden, da diese in der Nähe der neuen Lösung $\mathfrak{x}$ (für $t = n \cdot \Delta t$) liegt, wenn die Signale im System stetig sind. Dies ist ja meistens der Fall.

Je kleiner Δt gewählt wird, desto besser ist die Näherungslösung $\mathfrak{x}^{(0)}$ und desto schneller erhält man die endgültige Lösung $\mathfrak{x}$. Da zu Beginn der Simulation zur Zeit $t = 0$ ($n = 0$) noch keine Werte $\mathfrak{x}^{(0)}$ bekannt sind, sollen für diesen einzigen Zeitpunkt die Werte $\mathfrak{x}^{(0)}$ direkt berechnet werden. Dies führt im allgemeinen zu keinen Schwierigkeiten, da zur Zeit $t = 0$ die Ausgangssignale der Totzeit- und Gewichtsfunktions-Glieder Null sind, so daß das System auf einige wenige Glieder zusammenschrumpft.

Eine wesentliche Vereinfachung der Lösung des algebraischen Gleichungssystems (88) ließe sich erreichen, wenn man zur Berechnung des Ausgangssignals eines Gewichtsfunktions- und Differentiations-Gliedes nur die vergangenen Werte des Eingangssignals $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ berücksichtigt. Dadurch wird für diese linearen Glieder $Q_n = 0$, und man erhält ein einfacheres gestaffeltes Gleichungssystem, das man in vielen Fällen ohne Iteration leicht lösen kann.

7. Schlußbemerkung

Das beschriebene mathematische Verfahren zur Berechnung allgemeiner Regelsysteme hat den Vorteil, daß der Rechnungsgang einfach und unabhängig von der Struktur des Regelsystems ist. Die Anzahl der Rechnungen ist allerdings beträchtlich, so daß man nur kleine Systeme manuell, größere dagegen mit einem elektronischen Digitalrechner berechnen wird, zumal sich das Verfahren besonders gut für die Programmierung einer solchen Maschine eignet.

Ganz besonderer Dank gebührt Herrn Prof. Dr. L. Merz und Herrn Prof. Dr. F. L. Bauer, Technische Hochschule München, die durch ihren Rat und ihre Unterstützung diese Arbeit sehr gefördert haben.

Literatur:

- [1] Oppelt, W.: Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge. Verlag Chemie, Weinheim (Bergstr.) 1956.
- [2] Zavorka, I.: Allgemeine analytische Bestimmung der dynamischen Eigenschaften von Rektifikationseinheiten. Zeitschrift Messen, Steuern, Regeln (Juni 1962).
- [3] Trauboth, H.: Die Umformung von gewöhnlichen Differentialgleichungen in Blockschaltbilder. Regelungstechnik 13 (1965) H. 10, S. 487—493.
- [4] Zurmühl, R.: Praktische Mathematik. Springer Verlag, Berlin 1958.
- [5] Truxal, J. F.: Automatic Feedback Control System Synthesis. McGraw Hill, New York 1955.
Deutsche Fassung: Entwurf automatischer Regelsysteme. R. Oldenbourg Verlag, München 1960.
- [6] Ledley, R. S.: Digital Computer and Control Engineering. McGraw Hill, New York 1960.
- [7] Bauer, F. L., und Baumann, R.: Mathematische Behandlung von Netzwerksaufgaben mit Hilfe elektronischer Ziffernrechenanlagen. Elektrizitätswirtschaft 57 (1958), S. 181—187.
- [8] Rutishauser, H.: Zur Matrizeninversion nach Gauß-Jordan. Z. angew. Math. Phys. 10 (1959), S. 281—291.
- [9] Dommel, H.: Digitale Rechenverfahren für elektrische Netze. Dissertation TH München, 1962.
- [10] Alt, F. L.: Electronic Digital Computers. Academic Press, New York 1958.
- [11] Householder, A. S.: Principles of Numerical Analysis. McGraw Hill, New York 1953.
- [12] Baumann, R.: Some New Aspects on Load Flow Calculations, Part I: Impedance Matrix Generation Controlled by Network Topology. Trans. IEEE., PAS, in Vorbereitung.
- [13] Mayer, H. F.: Prinzipien der Pulscod-Modulation. Entwicklungsbericht Siemens & Halske AG, 1952.
- [14] Hölzler, E., und Holzwarth, H.: Theorie und Technik der Pulsmodulation. Springer Verlag, Berlin 1957.

Regelung einer Destillationskolonne für ein binäres Gemisch

Von T. MORINAGA und H. YAO, Tokio (Japan)¹⁾

Die Untersuchung des dynamischen Verhaltens einer Destillationskolonne für binäres Gemisch zeigt kleine Totzeiten im Verhältnis zur Zeitkonstante, wenn man die oberen Böden zur Temperaturmessung benutzt. In diesem Falle konnte mit Erfolg eine Zweipunkt-Regelung als Temperatur-Regelung eingesetzt werden.

Investigating the dynamic behaviour of a distillation column for a binary mixture, it is found that the dead time is short in relation to the time constant, if the temperature is measured on the upper ends. In this application, two-position (on/off) temperature control proved fully satisfactory.

Über das dynamische Verhalten der Destillationskolonne für ein binäres Gemisch wurde bereits von einem der Verfasser früher berichtet [1]. In dieser Arbeit wurde erklärt, daß die Ersatz-Zeitkonstante auf jedem Boden gleich ist, wenn die Flüssigkeitskonzentration auf einem Boden als Regelgröße und die Rücklaufmenge als Stellgröße gewählt wird. Tatsächlich wird die Flüssigkeitstemperatur ersatzweise als Regelgröße verwendet, da die Temperatur unter konstantem Druck der Konzentration entspricht. Außerdem wurde gezeigt, daß die Ersatz-Totzeit auf den unteren Böden größer wird. Die Totzeit ist aber sehr klein im Vergleich zur Zeitkonstante. Deshalb kann man selbst mit einer einfacher Zweipunktregelung einen guten Regelerfolg erwarten, wenn das Meß-

gerät möglichst auf einem der oberen Böden eingesetzt wird. Aus diesem Grund wurde die Zweipunktregelung einer Destillationskolonne, die 10 Böden hat und mit Methanol und Wasser betrieben wird, praktisch durchgeführt. Das Experiment zeigte, daß die Erwartung richtig ist.

Weiterhin darf erwartet werden, daß die Amplitude und die Periodendauer der Temperatur-Dauerschwingung kleiner sind, wenn das Meßgerät auf einem höher gelegenen Boden eingesetzt wird. Dazu wurden zwei Fälle untersucht, wo in einem Falle das Meßgerät auf dem zweiten und im anderen Falle auf dem vierten Boden angebracht wurde. Die experimentellen Werte entsprachen den theoretischen Werten ziemlich gut.

1. Experimentelle Anlage und Beharrungszustand der Kolonne

Die untersuchte Destillationskolonne besteht aus 10 Böden mit einem Durchmesser von 140 mm. Jeder Boden ist 170 mm hoch und hat 18 Glocken, deren Durchmesser 15,6 mm ist (Bild 1). Im Sumpf, dessen Durchmesser 300 mm beträgt, wird ein elektrischer Heizer eingesetzt. Die ganze Kolonne wird thermisch mit einer 5 cm dicken Glaswollschicht isoliert. Die Flüssigkeitstemperatur wird mit dem in die Flüssigkeit eingesteckten Kupfer-Konstantan-Thermoelement gemessen. Bild 2 zeigt die experimentelle Anlage. Bei stetiger Regelung wird das Thermoelement mit dem elektro-pneumatischen Regler verbunden. Bei der Zweipunktregelung wird die Spannung des Thermoelementes zunächst mit dem Gleichstromverstärker verstärkt (Verstärkungsfaktor 112 dB) und damit das Relais, ein im Sättigungsgebiet betriebener Transistor, gesteuert. Das Relais treibt das elektromagneti-

¹⁾ T. Morinaga, Department of Control Engineering, Tokyo Institute of Technology, ist zur Zeit am Institut für Regelungstechnik der TH Darmstadt als A.-von-Humboldt-Stipendiat tätig.

H. Yao, Toyo Koatsu A. G., Tokyo.
Deutsche Übersetzung eines gleichlautenden Aufsatzes aus dem Journ. of the Japan Soc. of Instr. a. Autom. Contr. 2 (1963), Heft 11, Seite 918—922.